



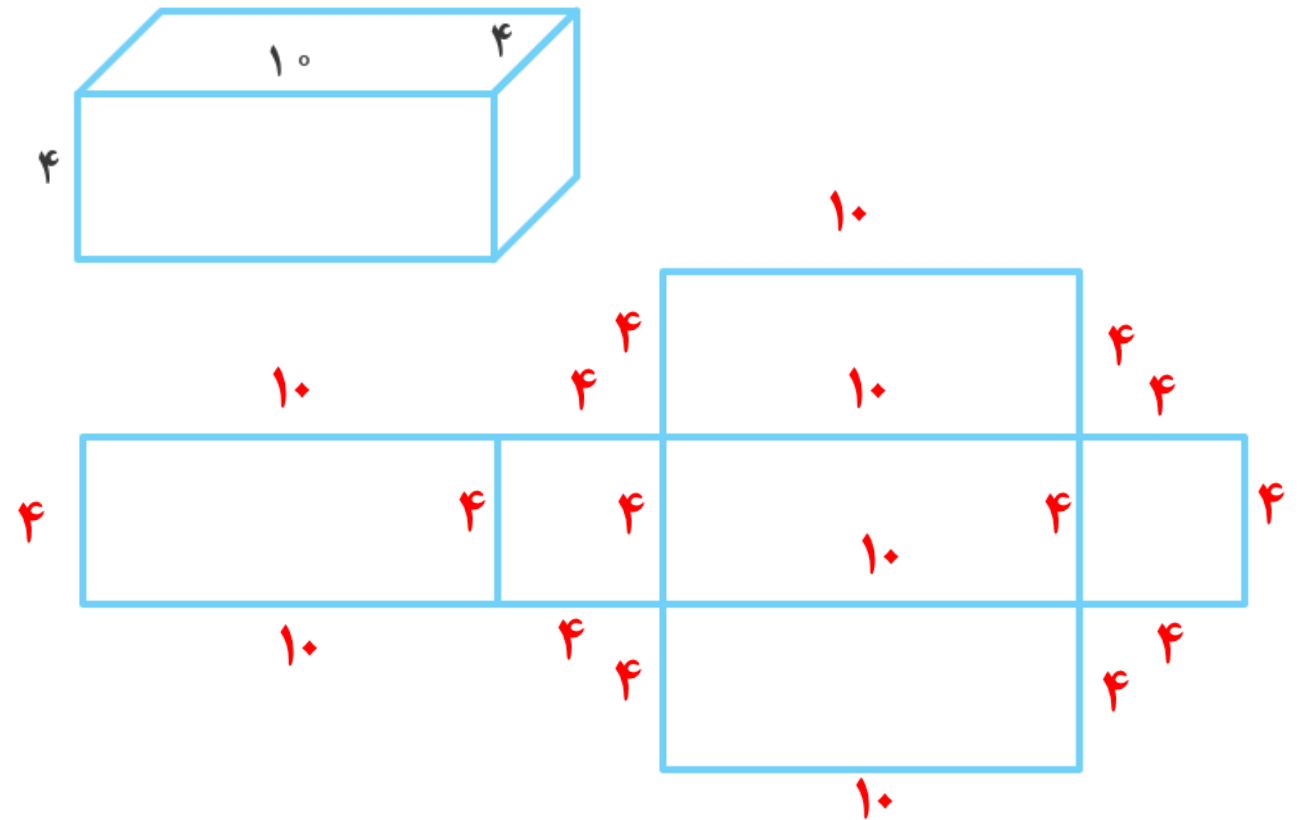
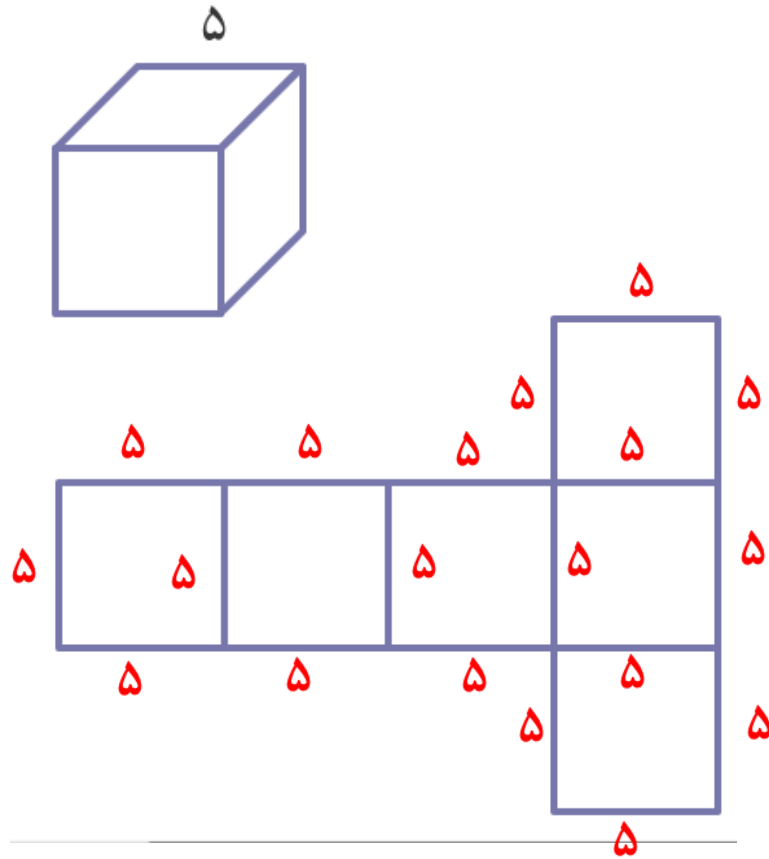
فصل ۸

حجم و مساحت

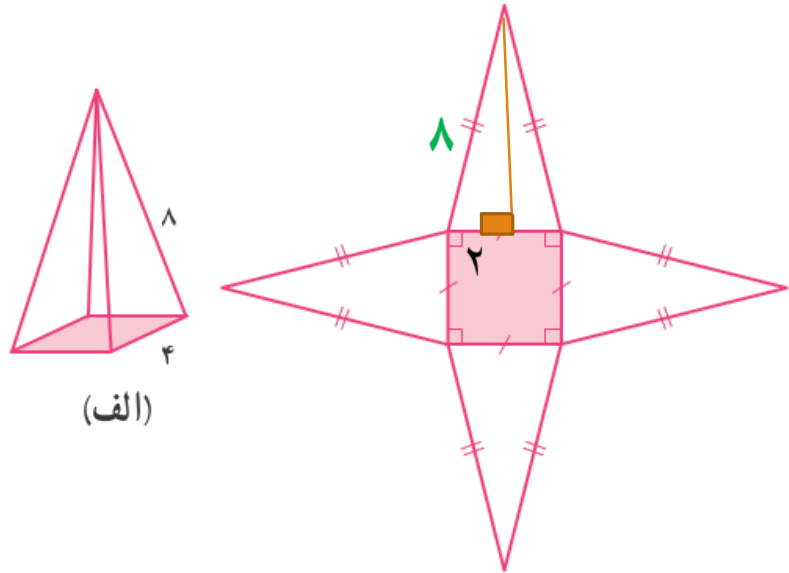
تمرین صفحه ۱۴۳

درس سوم: سطح و حجم

۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام مشخص کنید.



۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.



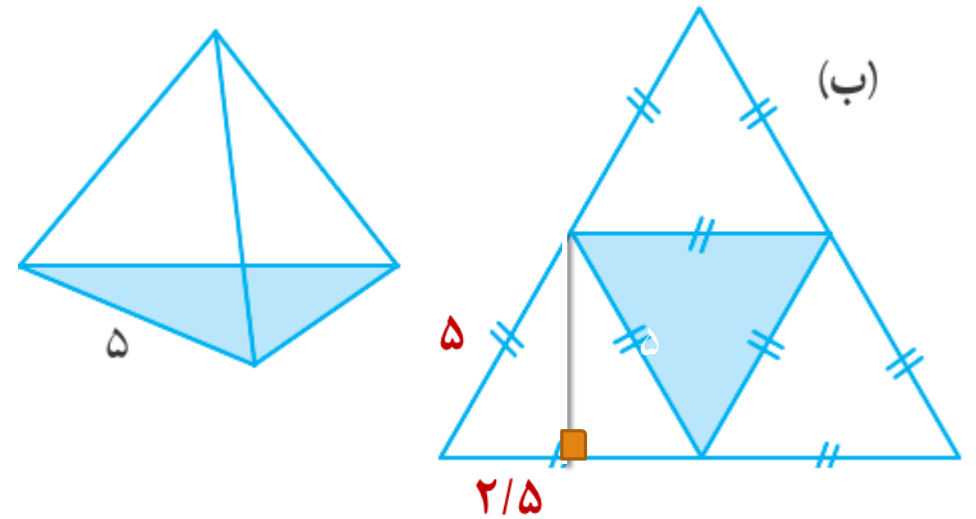
$$h^2 = 8^2 - 2^2 = 64 - 4 = 60 \quad h = \sqrt{60}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{4 \times \sqrt{60}}{2} = 2\sqrt{60} = 4\sqrt{15}$$

$$S_{\text{مثلث 4}} = 4 \times 4\sqrt{15} = 16\sqrt{15}$$

$$S_{\text{مربع}} = 4 \times 4 = 16$$

$$S_{\text{کل}} = 16\sqrt{15} + 16$$

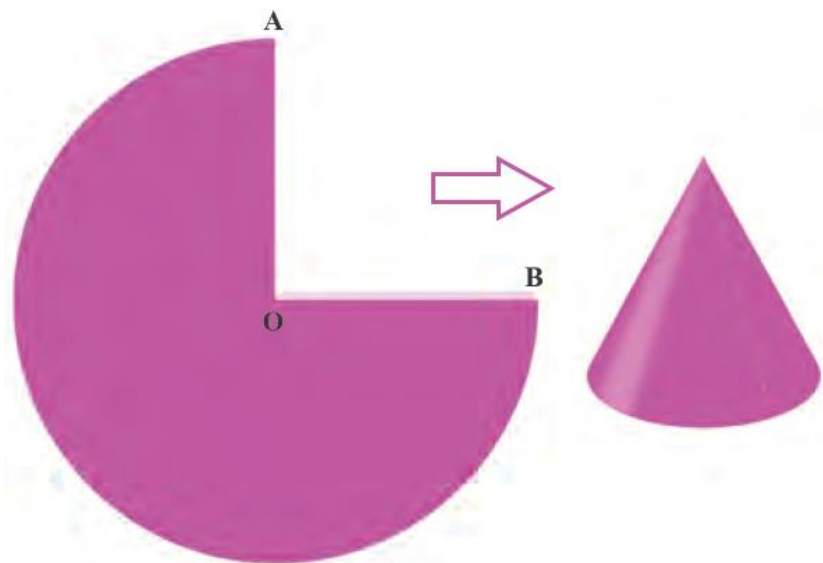


$$h^2 = 5^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 25 - \frac{4}{25} = \frac{625 - 4}{25} = \frac{621}{25}$$

$$h = \sqrt{\frac{621}{25}}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{5 \times \sqrt{\frac{621}{25}}}{2} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{621}{25}}$$

$$S_{\text{کل}} = 4 \times \frac{5}{2} \sqrt{\frac{621}{25}} = 10 \sqrt{\frac{621}{25}}$$



۳- با $\frac{3}{4}$ دایره‌ای به شعاع 10 سانتی متر یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R = 2\pi(10) = 20\pi$$

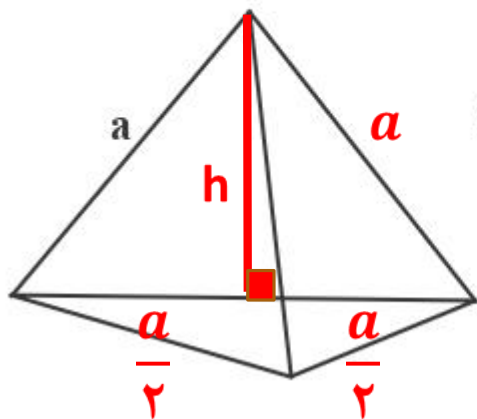
$$\text{طول کمان AB} = \frac{3}{4} \times \text{محیط دایره} = \frac{3}{4} \times 20\pi = 15\pi$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R$$

$$15\pi = 2\pi R$$

$$R = \frac{15\pi}{2\pi} = 7.5$$

چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ **برابر است**
شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.



۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید. طول همه یال های

آن a است.

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

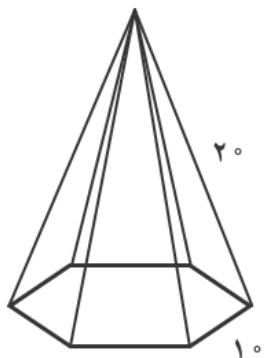
$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{هر مثلث}} = \frac{a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$s_{\text{کل}} = 4 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

هره منتظمه است پس هر ۴ مثلث برابرند.

۲- با توجه به اندازه‌های داده شده، گستردهٔ هرم را رسم کنید و مساحت جانبی آن را به دست آورید.

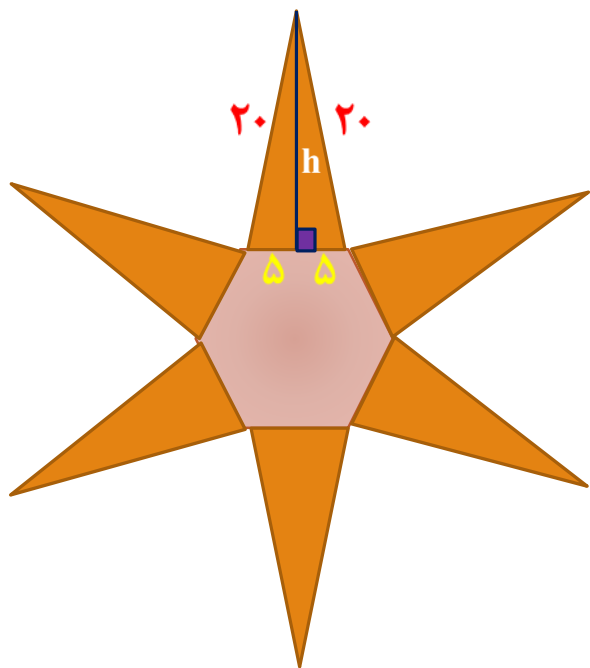


$$h^2 = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375 \quad h = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$$

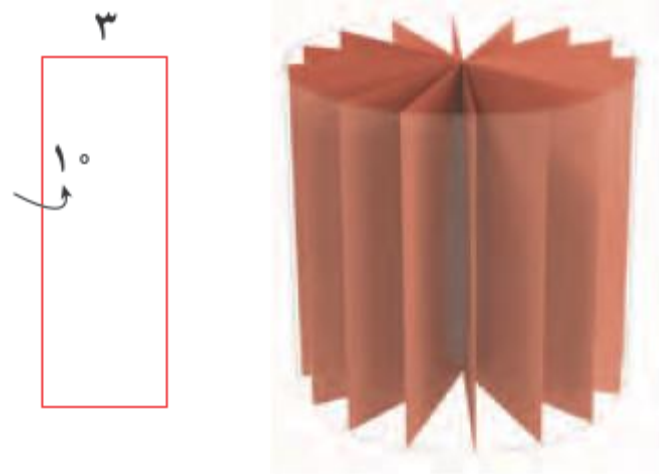
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{10 \times 5\sqrt{15}}{2} = 25\sqrt{15}$$

اینجا مساحت جانبی برابر ۶ مثلث می باشد

$$S_{\text{جانبی}} = 6 \times 25\sqrt{15} = 150\sqrt{15}$$



فعالیت



$$V=sh$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = \pi (3)^2 = 9\pi$$

$$h=10$$

$$V=9\pi \times 10 = 90\pi$$

۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می آید؟ **استوانه**

شعاع قاعده شکل حاصل : **۳**.....

ارتفاع شکل حاصل : **۱۰**.....

حجم شکل حاصل را پیدا کنید.



$$v = \frac{1}{3}sh$$

$$S = \pi R^2 = \pi(3)^2 = 9\pi$$

$$v = \frac{1}{3}9\pi \times 10 = 30\pi$$

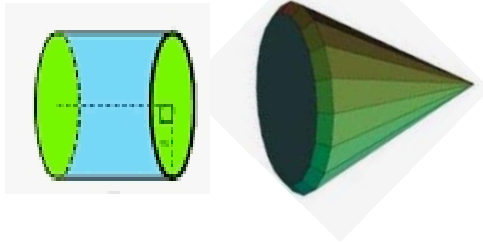
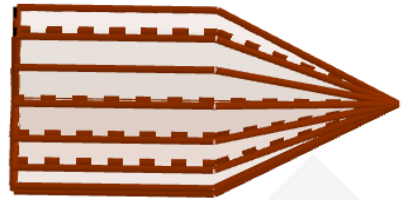
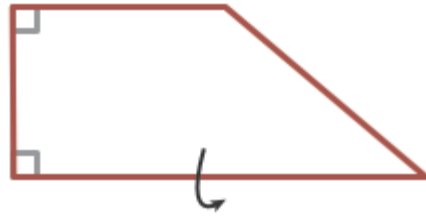
۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل، دوران دهیم، چه شکلی به دست می آید؟ **مخروط**

شعاع قاعده شکل حاصل : **۳**.....

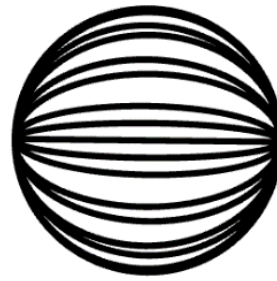
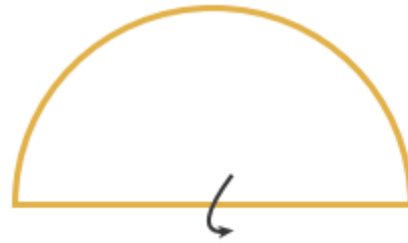
ارتفاع شکل حاصل : **۱۰**.....

حجم آن را پیدا کنید.

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.



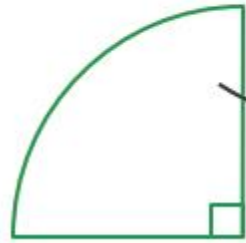
یک استوانه و یک مخروط



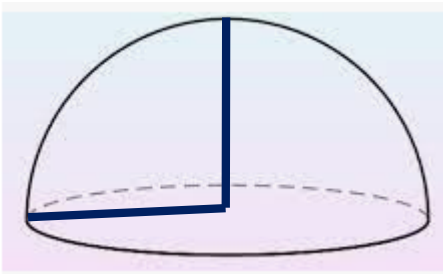
کره



گلدان

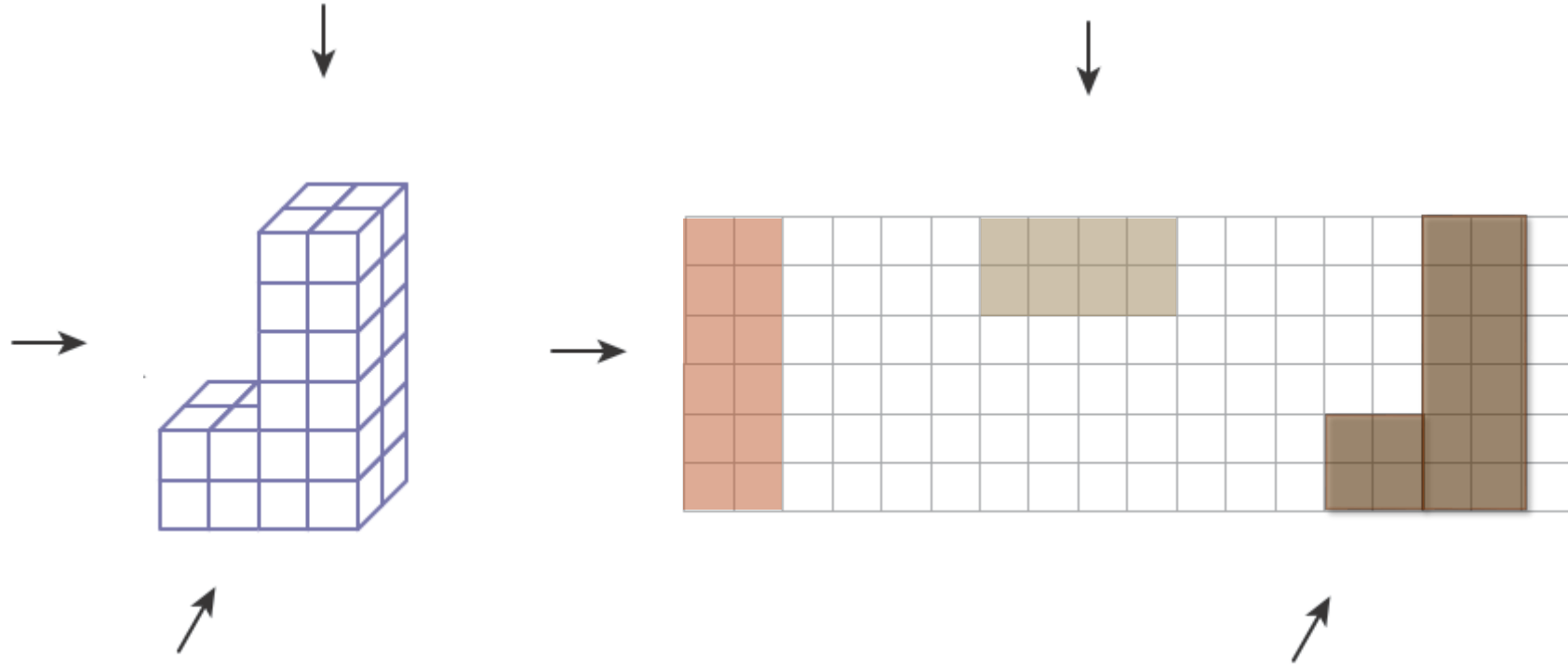


حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید.

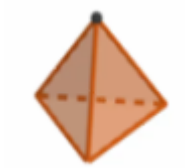


$$V_{\text{نیمکره}} = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi (5)^3 = \frac{250}{3} \pi$$

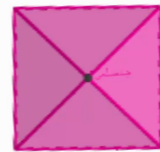
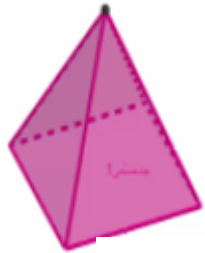
۱- با توجه به حجم زیر، در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت‌های مشخص شده را رسم کنید.



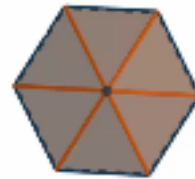
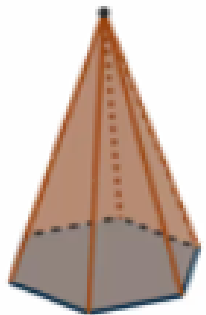
۲- اگر هر کدام از هرم‌های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می‌شود؟



الف) هرم منتظم با قاعده مثلث مثلث



ب) هرم منتظم با قاعده مربع مربع



ج) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی شش ضلعی

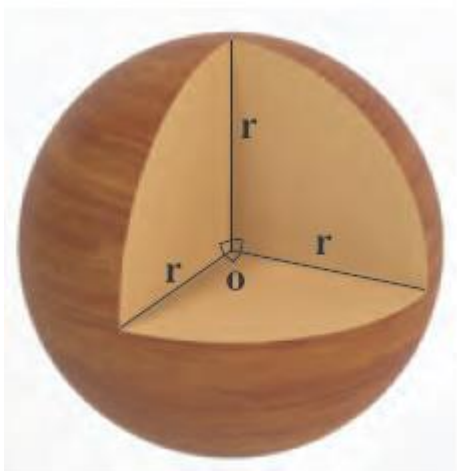
۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. **سطح**

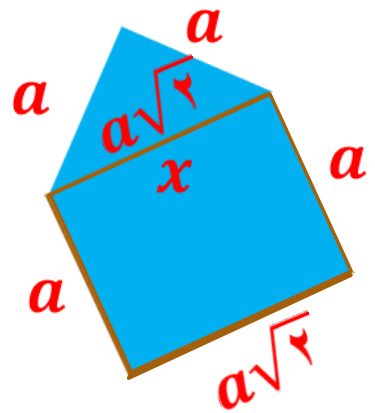
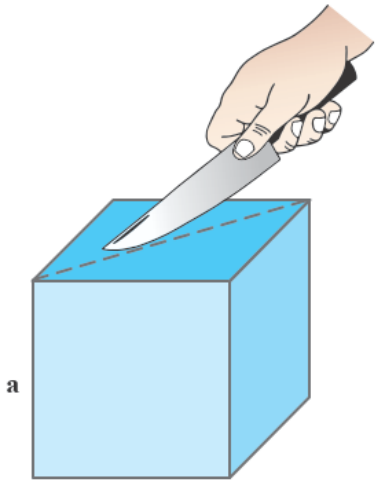
بریده شده چه شکلی دارد؟ **دایره**



در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟ **زمانی که روی قطر کره بریده شود**

۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟ $\frac{1}{8}$





یک اسفنج مکعب شکل به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

مستطیل

$$x^2 = a^2 + a^2$$

$$x^2 = 2a^2$$

$$x = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

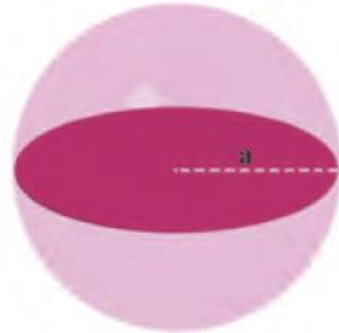
مکعب به ضلع a



$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

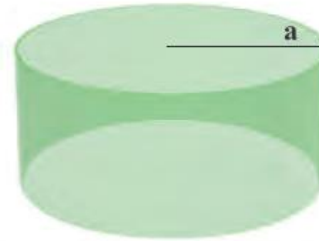
کره به شعاع a



$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$

استوانه به ارتفاع و
شعاع قاعده a



$$V = \pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$

استوانه به ارتفاع
و قطر قاعده a



$$V = \frac{1}{4}\pi a^3$$

$$S = \frac{3}{2}\pi a^2$$



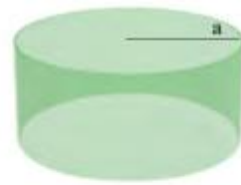
$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$



$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$



$$V = \pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$



$$V = \frac{1}{4}\pi a^3$$

$$S = \frac{3}{2}\pi a^2$$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح ($\frac{V}{S}$) را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟ **نسبت کره بزرگتر است**

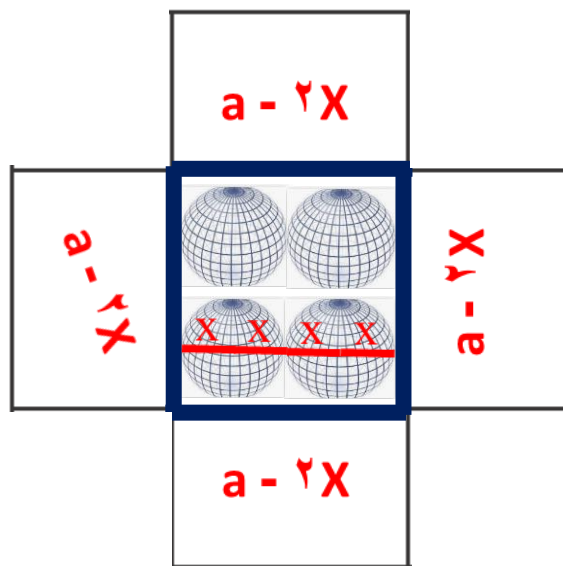
$$\left(\frac{v}{s}\right)_{\text{مکعب}} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$$

$$\left(\frac{v}{s}\right)_{\text{کره}} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{1}{3}a$$

$$\left(\frac{v}{s}\right)_{\text{استون}} = \frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$$

$$\left(\frac{v}{s}\right)_{\text{استون}} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2} = \frac{a}{6}$$

۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای باید بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد به طوری که هر کره به کره مجاورش و به دیواره جعبه مماس باشد؟



$$a - 2x = 4x$$

$$a = 4x + 2x$$

$$a = 6x$$

ساده‌تر
باشد