



## حجم و مسامت

### فصل ۸

تمرین صفحه ۱۳۹

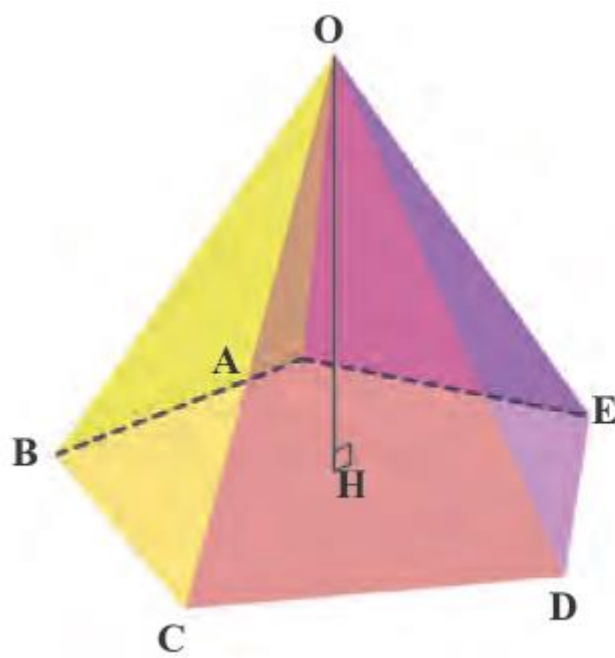
درس دوم: حجم هرم و مخروط

## درس دوم: حجم هرم و مخروط



یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم  
هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را  
شنیده‌اید. نمونه دیگری از شکل‌های هرمی را  
نام ببرید. ... **کلاه تولد** .....





هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند.

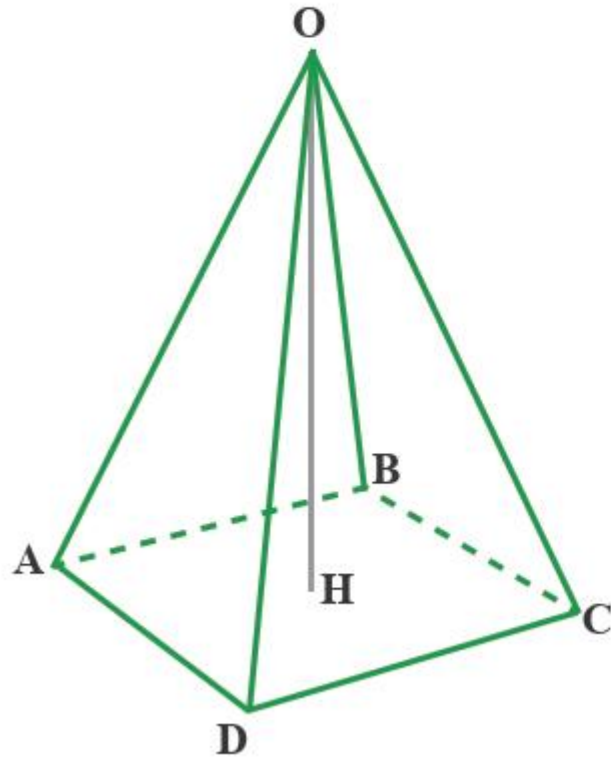
در هرم مقابل، نام رأس : **O** ..... تعداد وجه‌ها : **۶** .....

شکل وجه‌ها : **مثلث** ..... شکل قاعده : ..... نام قاعده : **ABCDE** .....  
**پنج ضلعی**

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم

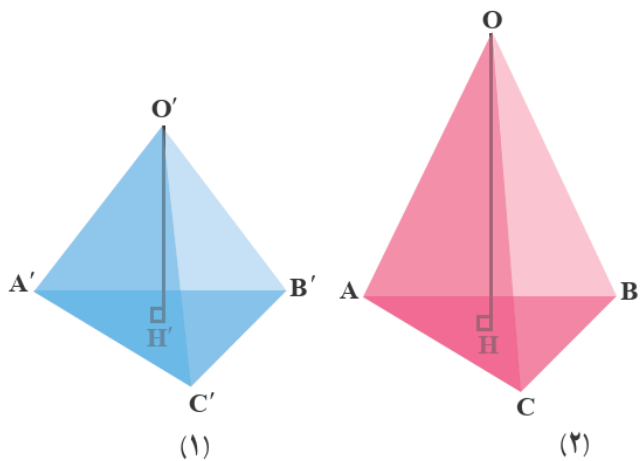
می‌گویند. در شکل،  $OH$  بر قاعده  $ABCDE$  عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری

هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به‌عنوان مثال هرم بالا به‌صورت  $OABCDE$  خوانده می‌شود.



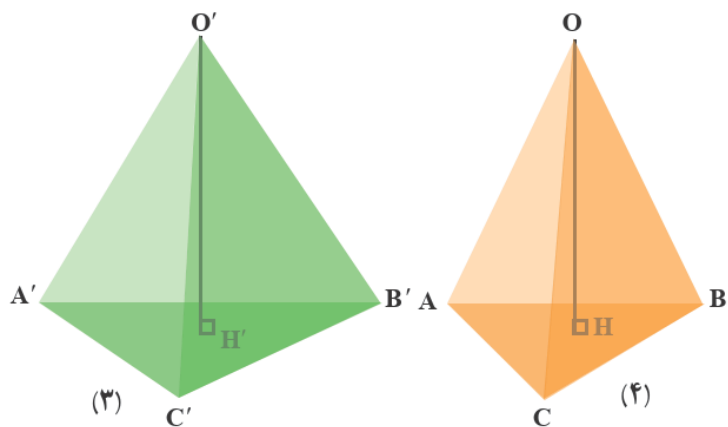
۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل، نام رأس: **O** ... ارتفاع: **OH** ... شکل قاعده: **مربع** ... شکل وجه‌های جانبی: **مثلث** ... تعداد وجه‌ها: **۵** ...

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در شکل‌های (۱) و (۲) مثلث‌های قاعده هم نهشت‌اند.



$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل‌های (۳) و (۴) ارتفاع‌ها برابر است.



$$O'H' = OH \text{ و } S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' > V$$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ **ارتفاع و مساحت قاعده**

ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می‌کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه **قاعده و ارتفاع**

حدسی می‌زنید؟ **از مساحت قاعده و ارتفاع استفاده می‌کنیم**

د) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، درباره حجم‌های

آنها چه می‌توانید بگویید؟ **دارای حجم‌های یکسانی هستند**

اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم‌های آنها با هم برابر است.

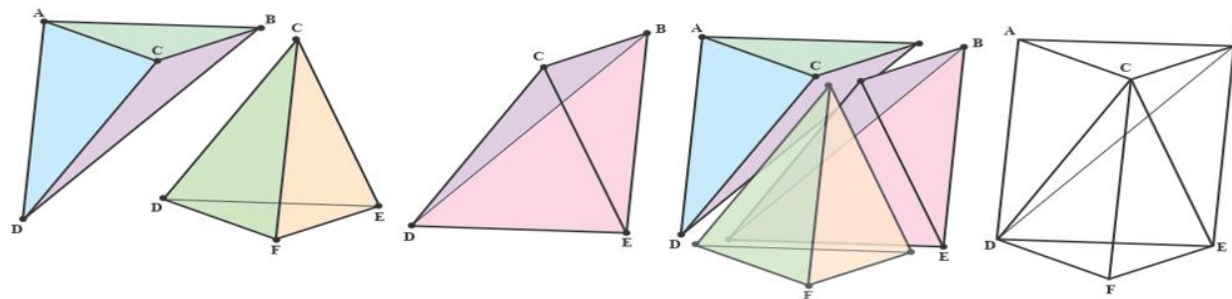
در شکل مقابل، یک وجه یک مکعب مستطیل و  $ABCD$  یک وجه مقابل،  $A'B'C'D'$  است. چرا  $M$  و  $N$  دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل  $(A'B'C'D')$  است. چرا هرم‌های  $MABCD$  و  $NABCD$  دارای حجم‌های یکسان است؟

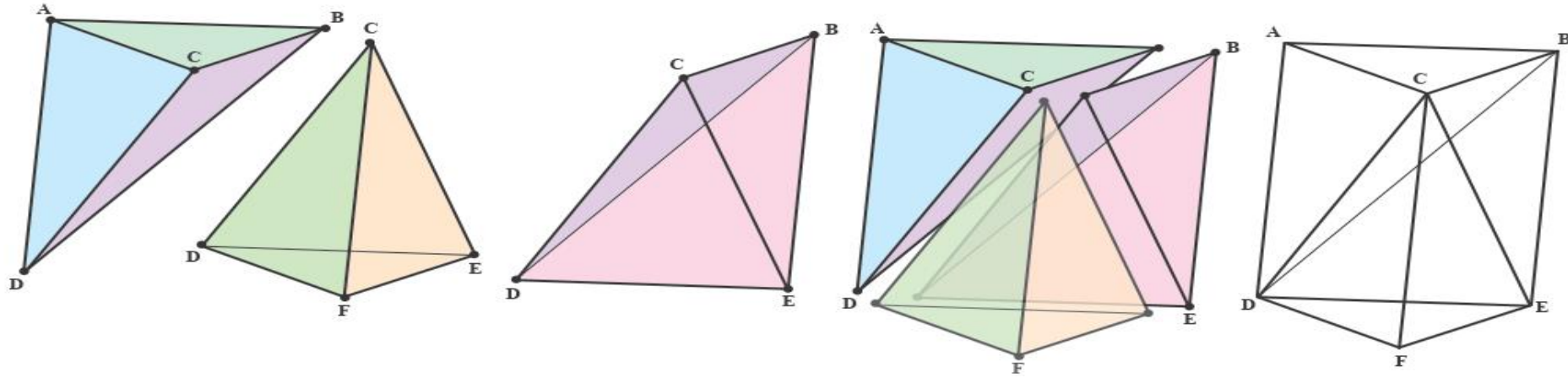
**زیرا مساحت قاعده و ارتفاع هر دو هرم با هم برابر است**

به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟ **بی شمار**

## محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشوری با دو قاعده  $\triangle ABC$  و  $\triangle DEF$  را می بینید. نقطه  $C$  را به نقطه های  $D$  و  $E$  و نقطه  $B$  را به نقطه  $D$  وصل می کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.





۱- چهارضلعی ABED، چه نوع چهارضلعی است؟ **مستطیل**

چرا مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت‌اند؟ **زیرا قطر مستطیل، مستطیل را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند**

۲- چرا هرم‌های CBAD و CBED دارای حجم‌های برابرند؟ **زیرا مساحت قاعده و ارتفاع آنها مساوی هستند**

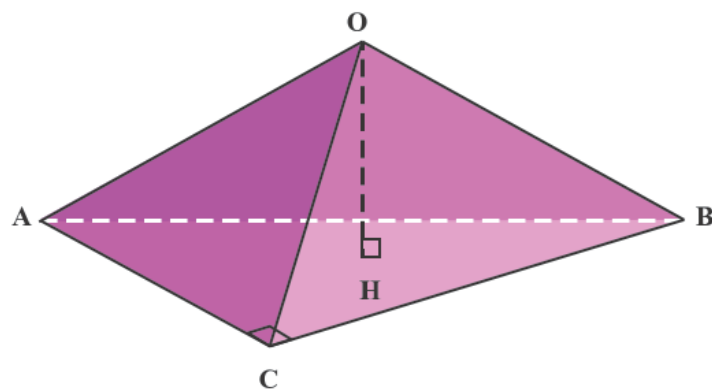
۳- چرا مثلث‌های ABC و DEF هم مساحت‌اند؟ **زیرا هر دو قاعده منشور هستند و با هم برابرند**

۴- چرا هرم‌های DABC و CDEF دارای حجم‌های برابرند؟ **زیرا دارای مساحت قاعده و ارتفاع یکسانی هستند**

۵- با توجه به پاسخ سؤال‌های ۲ و ۴ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ **هر سه هرم حجم‌های برابری دارند**

حجم هر هرم با مساحت قاعده  $S$  و ارتفاع  $h$  برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

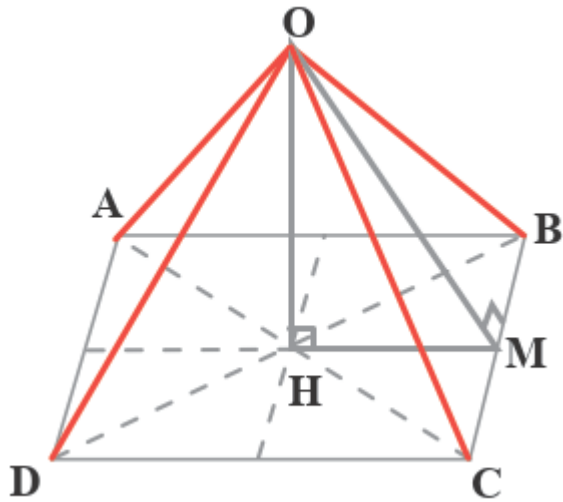


در هرم  $OABC$ ،  $AC = 6\text{ cm}$  و  $BC = 10\text{ cm}$  و زاویه  $\hat{ACB} = 90^\circ$  و  $OH$  ارتفاع هرم مساوی  $5\text{ cm}$  است. با کامل کردن عبارتهای زیر حجم هرم را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{6 \times 10}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 30 \times 5 = 50 \text{ cm}^3$$

۱- در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها  $10\text{ cm}$  و  $M$  وسط  $BC$  است.

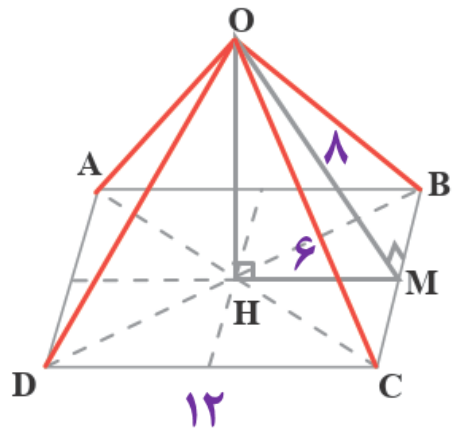


الف) پاره‌خط  $OM$  در مثلث  $OBC$  چه خواصی دارد؟ **نیمساز و میانه و ارتفاع است**  
 ب) مثلث  $OBM$  چه نوع مثلثی است؟ **قائم‌الزاویه است.**

ج) اگر طول ضلع قاعده،  $12\text{ cm}$  باشد، به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث  $OBM$  طول  $OM$  را حساب کنید.

$$OM^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$OM = \sqrt{64} = 8$$



(د) مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ **قائم الزاویه**

طول MH چقدر است؟ **۶**

(ه) به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را به دست آورید.

$$OH^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$$

$$OH = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

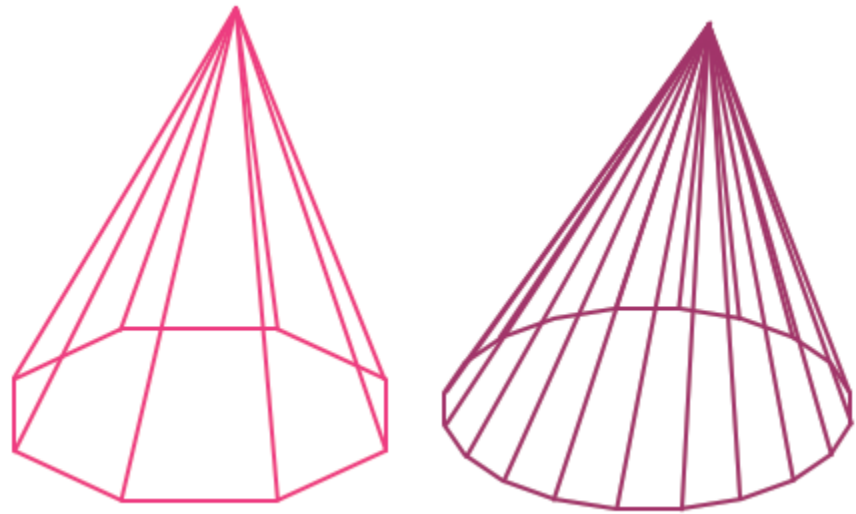
(و) حجم هرم OABCD را به دست آورید.

$$S = 12 \times 12 = 144$$

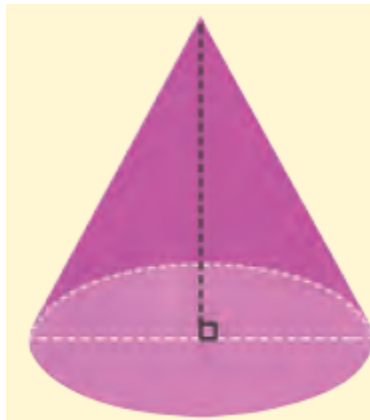
$$h = 2\sqrt{7}$$

$$v = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times 144 \times 2\sqrt{7} = 96\sqrt{7}$$

۲- هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و ... . حال تعداد ضلع های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می شود؟ **دایره**



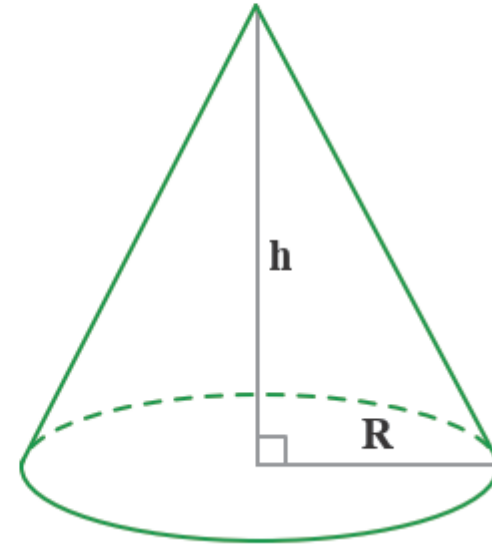
هرم به چه شکلی نزدیک می شود؟ **مخروط**

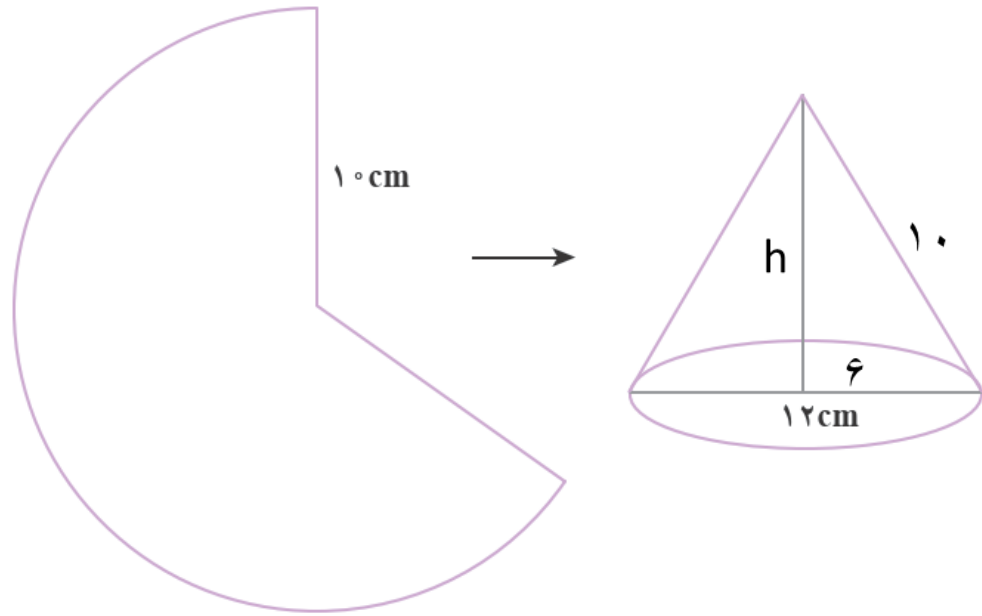


مخروط، شکلی شبیه هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

از اینجا نتیجه می‌شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$





علی با قسمتی از دایره‌ای  
به شعاع ۱۰ cm، مخروطی به قطر  
قاعده ۱۲ cm ساخته است. حجم این  
مخروط را به دست آورید.

$$h^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$h = \sqrt{64} = 8$$

$$v = \frac{1}{3}sh$$

$$v = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 8 = 96\pi$$

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتی متر و ارتفاع آن

۱۰ سانتی متر باشد.

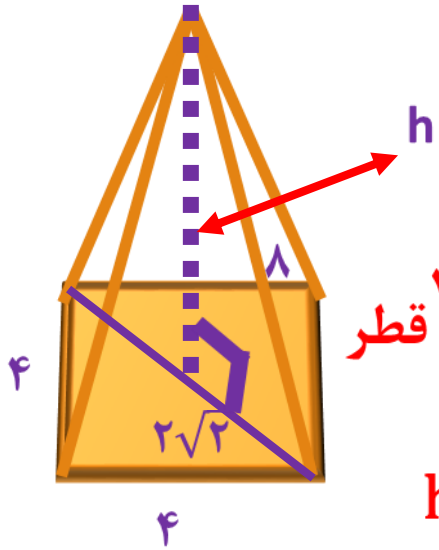
$$S = (\text{طول} \times \text{عرض}) = 5 \times 6 = 30$$

$$h = 10$$

$$V = \frac{1}{3}sh$$

$$V = \frac{1}{3} \times 30 \times 10 = 100$$

۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸cm باشد.



ابتدا قطر مربع را محاسبه می‌کنیم.  $\text{قطر} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$   $\text{قطر}^۲ = ۴^۲ + ۴^۲ = ۱۶ + ۱۶ = ۳۲$

$$h^2 = ۸^2 - ۲\sqrt{۲}^2 = ۶۴ - ۸ = ۵۶ \quad h = \sqrt{۵۶}$$

$$S = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

$$h = \sqrt{۵۶}$$

$$v = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times ۱۶ \times \sqrt{۵۶} = \frac{۱۶}{۳} \sqrt{۵۶}$$



۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می کنیم و در لیوانی استوانه ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶cm است، خالی می کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می آید؟

ابتدا حجم مخروط را به دست می آوریم .  
 $S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = \pi (4)^2 = 16\pi$   
 $h = 12$

$$v = \frac{1}{3}sh$$

$$v = \frac{1}{3} 16\pi \times 12 = 64\pi$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi (6)^2 h$$

$$64\pi = 36\pi h$$

$$h = \frac{64\pi}{36\pi} = 1\frac{1}{9}$$

شاد باشید