



حجم و مساحت

درس اول: حجم و مساحت کره

فصل ۸

درس اول: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند: منشوری، کره و هرمی.

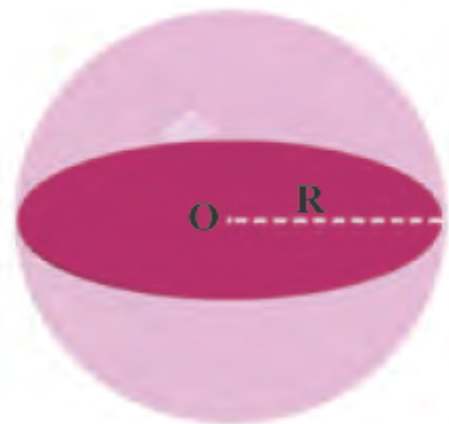


کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کره است. چند نمونه دیگر از حجم‌های کره را نام ببرید. **پرتقال، توپ تنیس**

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید :

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.

با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.

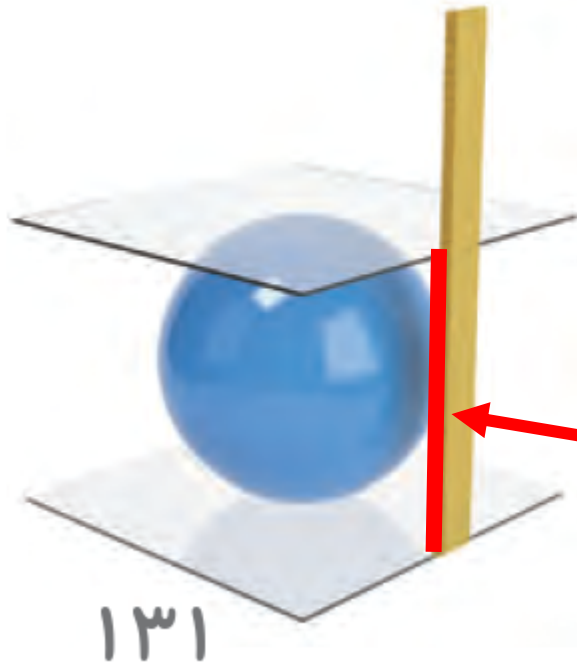


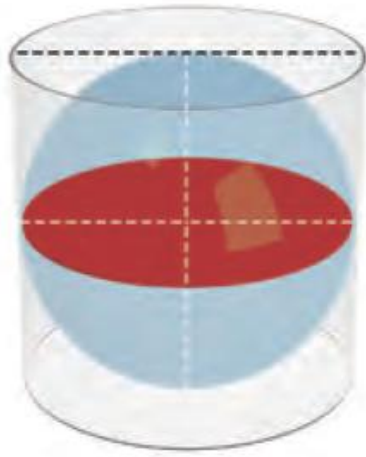
کره مجموعه **نقاطی** از فضا است که **همه نقاط آن از یک نقطه به نام مرکز** **به یک فاصله** هستند. به این اندازه **شعاع** می‌گوییم.

۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.

● یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.

● مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر کره را اندازه بگیرید.





● مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید، به طوری که توپ کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب R نشان دهید.

$2R$: ارتفاع استوانه

R : شعاع قاعده استوانه

$\pi R^2 h =$: حجم استوانه



● توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را بپیرید تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره ها را داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود، با دو نیم کره، فضای باقیمانده پر از آب می شود.

الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟ $\frac{3}{2}$

ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟ $\frac{3}{2}$

ج) بنابراین حجم کره $\frac{2}{3}$ برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد،

دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

حجم کره ای به شعاع R از دستور $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ به دست می آید.

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع 10 سانتی متر محاط شده است.

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (5^3) = \frac{500}{3} \pi$$

الف) حجم کره را به دست آورید.

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi 5^2 (10) = \pi \times 25 \times 10 = 250\pi$$

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

حجم کره - حجم استوانه = حجم بین کره و استوانه

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

$$250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{250}{3}\pi$$

۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع 10 سانتی متر را به دست آورید. $V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi R^3$

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi (10^3) = \frac{2000}{3} \pi$$

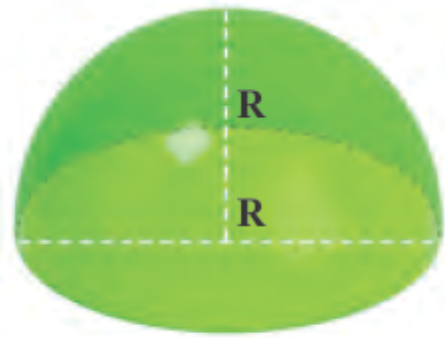


مانند شکل مقابل، نیم کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بپوشاند.

این دو دایره کاغذی را هرطور که دوست دارید، برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حدامکان، کاغذها روی هم قرار نگیرند و سطح نیم کره نیز دیده نشود.

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بپوشانید؟ **بله**
درباره مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفت و گو

کنید.



ثابت می شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع R ، دو برابر مساحت دایره ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).

الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با: $2\pi R^2$

ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با: $4\pi R^2$

مساحت یک کره به شعاع R برابر است با: $S=4\pi R^2$



۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره

$$\text{مساحت نیمکره} = 2\pi R^2 = 2\pi(10^2) = 200\pi$$

به شعاع ۱۰ سانتی متر را پیدا کنید.

۲- می خواهیم یک نیم کره چوبی توپر به شعاع ۱۰ سانتی متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت

$$\text{مساحت کف نیمکره چوبی} = \pi R^2 = \pi(10^2) = 100\pi$$

رنگ شده را پیدا کنید.

$$\text{مساحت رویه نیمکره} = 2\pi R^2 = 2\pi(10^2) = 200\pi$$

مساحت رویه نیمکره چوبی + مساحت کف نیمکره چوبی = مساحت کل نیمکره چوبی

$$\text{مساحت کل نیم کره} = 100\pi + 200\pi = 300\pi$$

بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

در مساحت کل نیمکره چوبی علاوه بر مساحت رویه باید مساحت کف را حساب کرد

۱- قطر تقریبی کره زمین حدود 12800 کیلومتر است.

$$\text{قطر} = 12800 = 1/28 \times 10^4$$

$$\text{شعاع} = 12800 \div 2 = 6400 = 6/4 \times 10^3$$

الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

ب) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع با نماد علمی بنویسید.

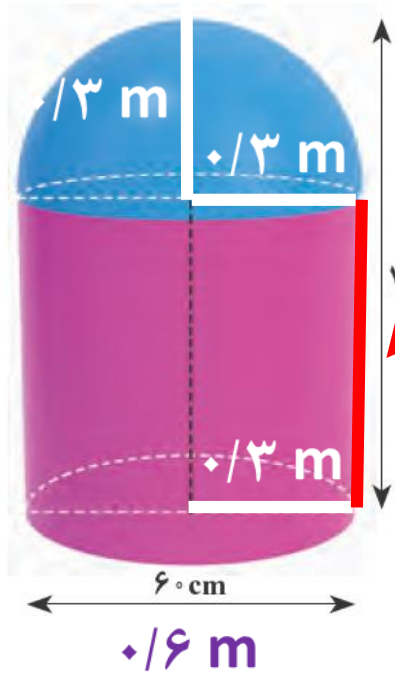
$$= 4\pi R^2 = \text{مساحت رویه کره زمین}$$

ج) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود $1/648/000$ کیلومتر مربع است. مساحت

ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

$$\frac{1/648 \times 10^6}{5/144576 \times 10^8} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{1/648 \times \cancel{10^6} \times \cancel{10^2}}{5/144576 \times \cancel{10^8}} = 0/32$$



ارتفاع استوانه

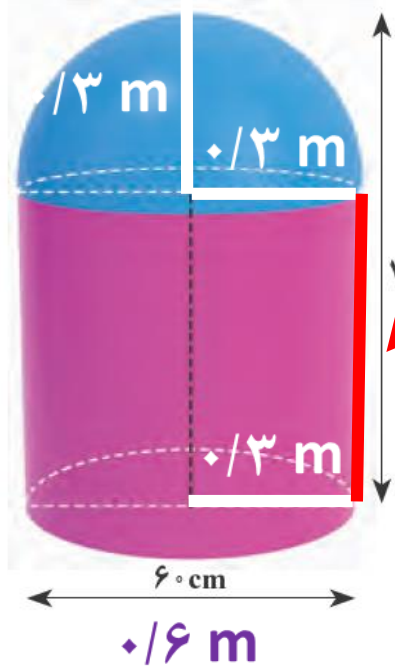
۲- یک استوانک^۱ (کپسول) گاز از قرار گرفتن یک نیمکره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده استوانک ۶۰ سانتی متر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم استوانک را بر حسب متر مکعب به دست آورید.

ابتدا حجم استوانه:

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi (0.3)^2 (0.7) = \pi \times 0.09 \times 0.7 = 0.063\pi$$

$$\text{حجم نیمکره به شعاع } 0.3 \quad \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi \times 0.3^3 = 0.18\pi$$

$$\text{حجم استوانک} = 0.063\pi + 0.18\pi = 0.243\pi$$



ارتفاع استوانه

1 m
0.7 m

سطح جانبی استوانه:

$$2\pi r h = 2 \times \pi \times 0.3 \times 0.7 = 0.42 \pi$$

سطح نیمکره :

$$2\pi r^2 = 2 \times \pi \times 0.3^2 = 0.18 \pi$$

سطح قاعده استوانه :

$$\pi r^2 = \pi \times 0.3^2 = 0.09 \pi$$

مساحت کل استوانک :

$$0.42 \pi + 0.18 \pi + 0.09 \pi = 0.69 \pi$$

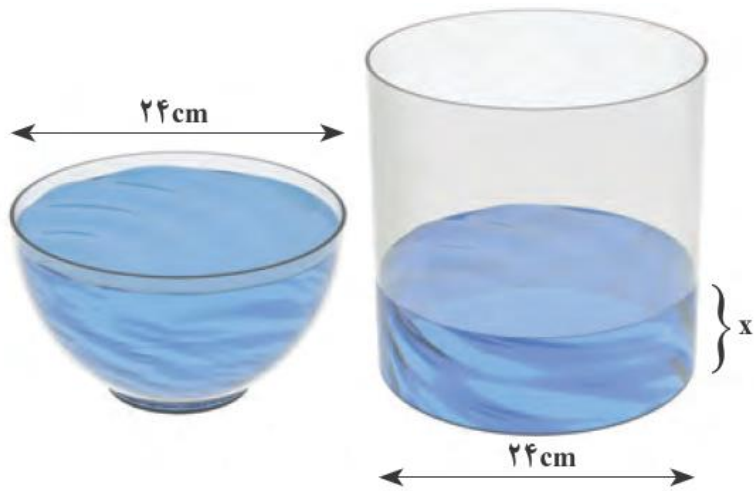
$$0.69 \times 3/14 = 2/17$$

$$\text{کیلوگرم } 0.1 = 100 \text{ گرم}$$

اگر بخواهیم سطح کل این استوانک را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است، به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد؟

عدد π را ۳/۱۴ در نظر می گیریم

$$\text{مقدار رنگ لازم } 2/17 \times 0.1 = 0.217$$



۳- پیمانه‌ای به شکل نیمکره و به قطر دهانه ۲۴ سانتی متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

$$V_{\text{کاسه}} = V_{\text{نیمکره}} = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi (12)^3 = \frac{2}{3} \pi (1728) = 1152 \pi$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h$$

حجم نیمکره برابر است با حجم آبی که در استوانه می‌ریزیم.

$$1152 \pi = \pi (12)^2 h$$

$$1152 \pi = 144 \pi h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{1152 \cancel{\pi}}{144 \cancel{\pi}} = 8$$

ساده باشد