



فصل ۷ - درس اول

## درس اول: معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا

### مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتی متر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل  $\frac{2}{3}$  باشد، طول و عرض آن را به دست آورید.

اگر  $x$  را عرض مستطیل در نظر بگیریم، طول آن  $x+4$  است و نسبت عرض به طول را می توان با  $\frac{x}{x+4}$  نمایش داد؛ بنابراین:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8 \quad \text{عرض} \quad \text{طول} = 12$$

عبارت  $\frac{x}{x+4}$  را، که نسبت دو چند جمله ای است، عبارت گویا می نامیم.

به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد.

از عبارتهای گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر استفاده می‌شود؛ به‌طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت  $v_1$  طی کرده و سپس از همان مسیر با سرعت  $v_2$  بازگشته است، از رابطه  $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$  به دست می‌آید که عبارت گویای جبری است. برخی از مثال‌های دیگر از این قرار است:

$\frac{a+b}{2}$	میانگین حسابی دو عدد a و b	}	$\frac{2k}{v^2}$	محاسبه جرم یک جسم با سرعت $v$ و انرژی جنبشی $k$
-----------------	-------------------------------	---	------------------	----------------------------------------------------

با توجه به تعریف بالا عبارتهای زیر گویا هستند:

$$\frac{2x-5}{5x^3-2x^2+1} \text{ و } \frac{x+5}{x-1} \text{ و } \frac{-a}{4} \text{ و } \frac{2}{5} \text{ و } \frac{x-3}{4} \text{ و } \frac{x}{y} \text{ و } \frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \text{ و } \frac{10}{x+2} \text{ و } \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \text{ و } \frac{xy^2}{(x-y)^2} \text{ و } \frac{x^3}{1} \text{ و } \frac{-a}{b} \text{ و } x^2+2x-7$$

اما عبارت‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

چون صورت یا مخرج آنها چند جمله ای نیست

کدام یک از عبارت‌های زیر گویاست؟

$$\frac{v}{x-1} \text{ و } \frac{x+6}{3} \text{ و } \frac{ah}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3}+x}{5} \text{ و } \frac{\sqrt{2x}}{25} \text{ و } \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y}+1}{x^2} \text{ و } \frac{x-5}{\sqrt{3}+1} \text{ و } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ و } \frac{mn+n^2}{5-n} \text{ و } 14 \text{ و } \frac{3-a}{2+x}$$

هر کدام صورت و مخرج چند جمله ای باشد، عبارت گویاست .

مقدار عددی عبارت  $\frac{x+5}{x-3}$  را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به دست آورید :

x	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	-5
$\frac{x+5}{x-3}$		$\frac{7+5}{7-3} = \frac{12}{4} = 3$		$\frac{0+5}{0-3} = -\frac{5}{3}$	$\frac{-1+5}{-1-3} = -1$	$\frac{-5+5}{-5-3} = 0$

$$\frac{-2+5}{-2-3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\frac{1}{2}+5}{\frac{1}{2}-3} = \frac{\frac{11}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{11}{5}$$

به ازای  $x=3$  مخرج عبارت گویای  $\frac{x+5}{x-3}$  مساوی صفر می شود و همان گونه که از قبل می دانید،

$\frac{8}{0}$  به عنوان عدد تعریف نمی شود. چون مخرج صفر است، تعریف نشده است.  $\frac{3+5}{3-3} = \frac{8}{0}$

برای تعیین همه مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آنها مخرج کسر صفر می شود؛ به عبارت دیگر این مقادیر را نمی توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

به زبان ساده مخرج عبارت را مساوی صفر قرار دهید، به ازای عدد یا اعدادی که به دست می آوریم عبارت تعریف نشده است.

مثال : عبارت گویای  $\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)(x+2)}$  به ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف نشده است؟

حل : چه مقادیری مخرج کسر را صفر می کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم؛ یعنی :

$$(x-1)(x+2)=0$$

از طرفی وقتی حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا :

$$\begin{cases} (x-1)=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ (x+2)=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای  $x=1$  و  $x=-2$  تعریف نشده است.

هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف)  $\frac{8x+5}{2}$  → به ازای همه مقادیر تعریف شده است. چون مخرج هیچوقت صفر نمی شود.

ب)  $\frac{7+x}{x}$  → فقط به ازای  $x=0$  تعریف نشده است. چون اگر به جای  $x$  صفر بگذاریم مخرج صفر می شود و مخرج صفر تعریف نشده است.

ج)  $\frac{2b+1}{2b-1}$  →  $2b - 1 = 0 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$   
یعنی به ازای  $b = \frac{1}{2}$  تعریف نشده است.

د)  $\frac{3x}{x^2 + 4}$   $\rightarrow$  به ازای همه ی مقادیر تعریف شده است . چون هیچ وقت مخرج صفر نمی شود .

ه)  $\frac{x}{x^2 - 1}$   $\rightarrow$  اتحاد مزدوج  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$

و)  $\frac{a+5}{a^2 - 5a + 6}$   $\rightarrow$  اتحاد جمله مشترک  $(a-2)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a-3=0 \Rightarrow a=3 \end{cases}$

## ساده کردن یک عبارت گویا

کسر  $\frac{36}{48}$  با کسرهای  $\frac{6}{8}$ ،  $\frac{9}{12}$ ،  $\frac{18}{24}$  و  $\frac{3}{4}$  مساوی است. بین این کسرها  $\frac{3}{4}$  کسری است که

دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع:

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن هر عدد گویا می توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای  $\frac{AC}{BC}$  داریم :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (A \text{ و } B \text{ و } C \text{ چند جمله‌ای هستند و } C \neq 0 \text{ و } B \neq 0)$$

## فعالیت

هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است، راه حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف)  $\frac{18y^3}{60y^5} = \frac{3}{10y^2}$

ب)  $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3} = \frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x+1)\cancel{(x+3)}} = \frac{x+3}{x+1}$

مزدوج

$$ج) \frac{y^2 - 9}{3y + 9} = \frac{\cancel{(y+3)}(y-3)}{3\cancel{(y+3)}} = \frac{y-3}{3}$$

فاکتور گیری از عدد ۳

$$د) \frac{8ab^7}{2^0 a^2 b^3} = \frac{2b^4}{5a}$$

$$ه) \frac{b-5}{5-b} = \frac{\cancel{b-5}}{-(\cancel{b-5})} = -1$$

فاکتور گیری از منفی یا منفی ۱

ابتدا چند جمله ای هایی که تجزیه می شوند را با استفاده از اتحاد یا فاکتورگیری تجزیه می کنیم ، سپس صورت و مخرج را ساده می کنیم .

۱- عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید :

الف)  $\frac{m^2 - 16}{4 - m} \Rightarrow \frac{\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{\cancel{(m-4)}(m+4)}}{\underset{\text{فاکتور از ۱-}}{\cancel{-1}(m-4)}} = -(m+4) = -m-4$

ب)  $\frac{6m+18}{7m+21} \Rightarrow \frac{\cancel{6}(m+3)}{\cancel{7}(m+3)} = \frac{6}{7}$  صورت از عدد ۶ و مخرج از عدد ۷ فاکتور می‌گیریم .

ج)  $\frac{a^2 - 5a - 14}{a^2 + a - 2} \Rightarrow \frac{\cancel{(a-7)}(a+2)}{\cancel{(a-1)}(a+2)} = \frac{a-7}{a-1}$  صورت و مخرج هر دو تجزیه از روش جمله مشترک .

$$د) \frac{x^4 - y^4}{y - x} \rightarrow \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{-1(x - y)} = \frac{(x+y)(\cancel{x-y})(x^2 + y^2)}{-1\cancel{(x - y)}} = -(x+y)(x^2 + y^2)$$

صورت دو بار تجزیه مزدوج می شود و مخرج از ۱- فاکتور می گیریم و ساده می کنیم.

۲- عبارت  $\frac{a + ax}{a}$  به دو شکل ساده شده ؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

الف)  $\frac{a + ax}{a} = a + x$

ب)  $\frac{a + ax}{a} = \frac{a(1 + x)}{a} = 1 + x$

در جمع اجازه ساده کردن نداریم ابتدا باید فاکتور بگیریم که به ضرب تبدیل شود بعد ساده کنیم.

شاد باشید  
..