



خط و معادله های خطی

درس اول : معادله خط

درس دوم : شیب خط و عرض از مبدا

درس سوم : دستگاه معادله های خطی

کاربرد هندسه و خط ها در فرش بافی، نگارگری، خطاطی، گچ بری، تذهیب و ... غیر قابل انکار و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خطوط برای ایجاد زاویه ها و جدا سازی فضاها استفاده های فراوان می شود.



۱- هزینه اشتراک یک خط اینترنت روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است. هزینه کلی x ساعت استفاده از اینترنت را با y نشان دهید و رابطه‌ای بین x و y بنویسید.

$$y = 2000x + 3000$$

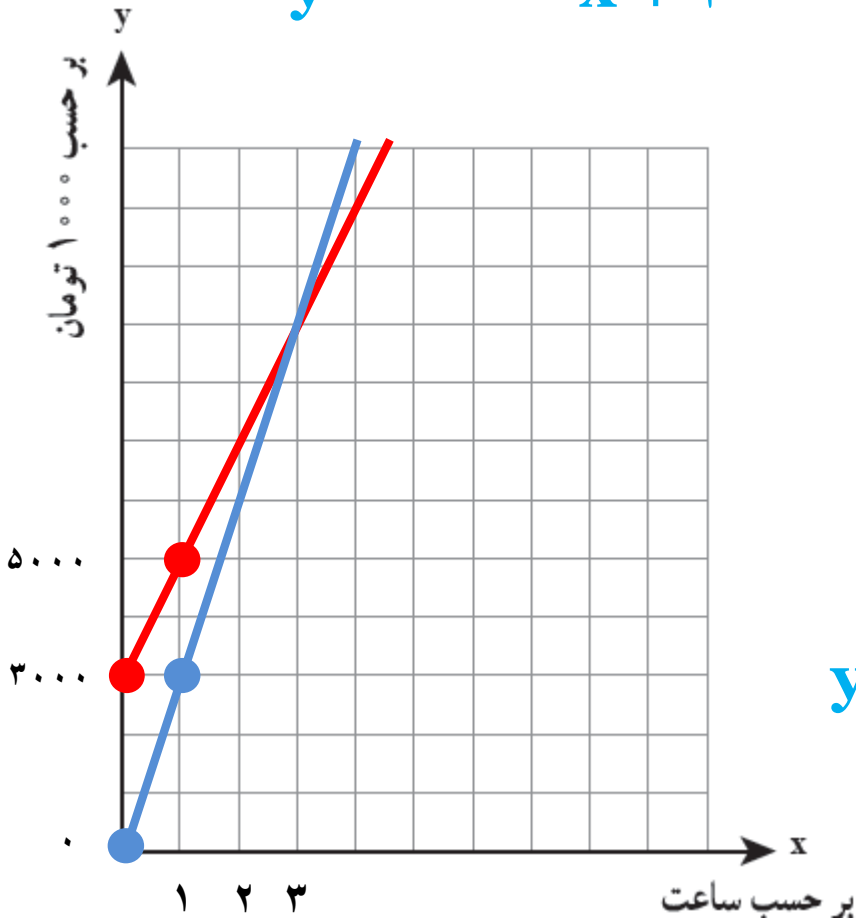
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

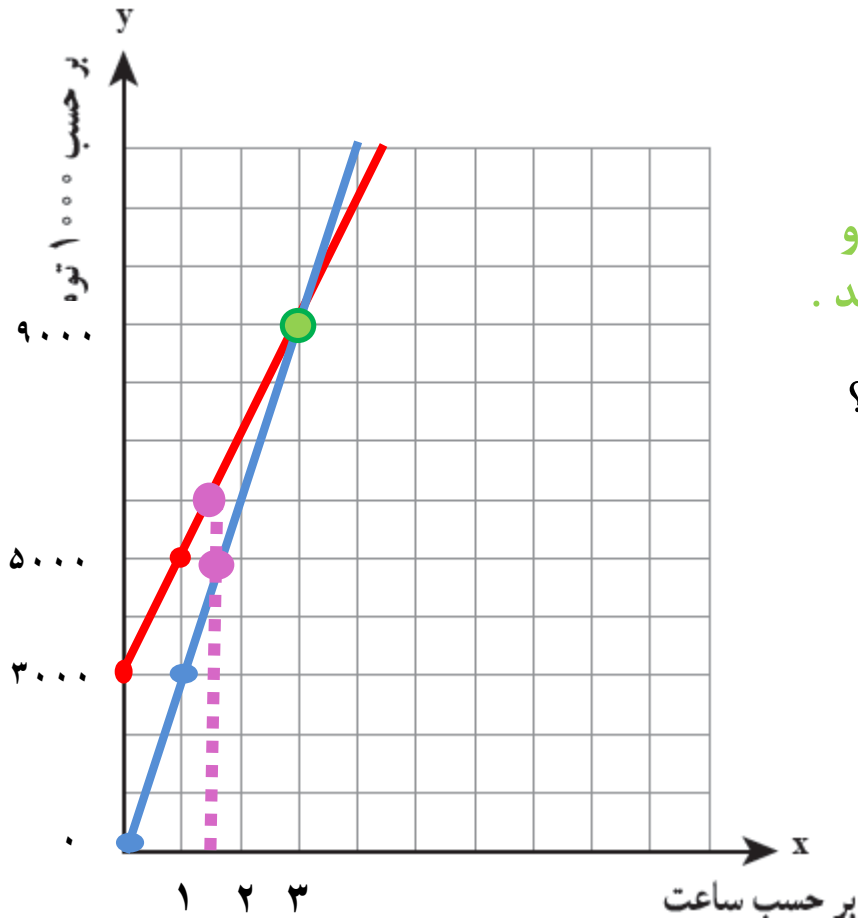
یک نوع دیگر از اشتراک اینترنت بدون مبلغ ثابت است؛ ولی برای هر ساعت استفاده، ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. رابطه‌ای بین هزینه اشتراک (y) و x ساعت استفاده از اینترنت را در این حالت بنویسید.

$$y = 3000x$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

دو خط به معادله‌های فوق را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید.





محل برخورد این دو خط چه ویژگی ای دارد؟

جواب هر دو معادله است.

یعنی در ۳ ساعت استفاده اینترنت هزینه در هر دو نوع اشتراک برابر با ۹۰۰۰ تومان میشود و مساوی اند.

برای ۱/۵ ساعت استفاده، کدام اشتراک بهتر است؟

اشتراک نوع اول:

$$y = 2000 + (1/5) \cdot 3000 = 4600$$

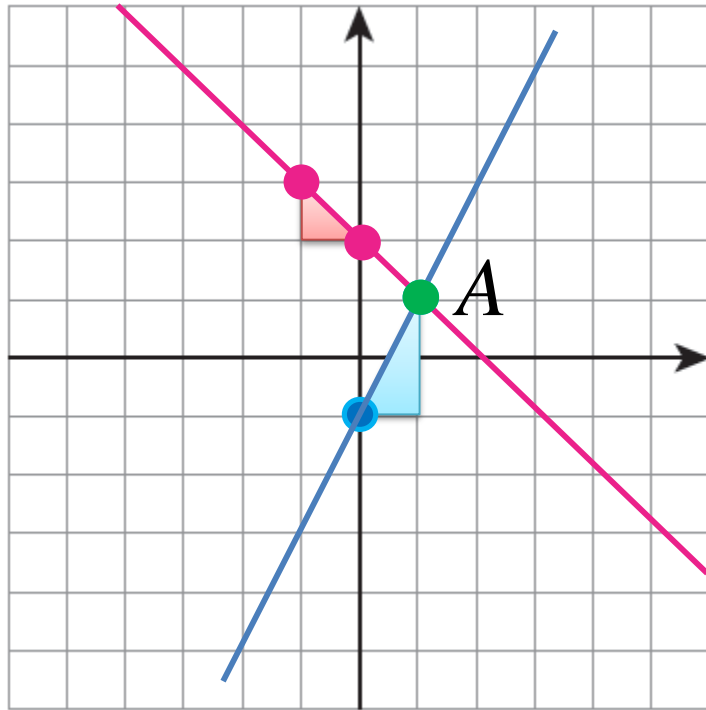
۳۰۰۰

اشتراک نوع دوم:

$$y = 3000 \cdot (1/5) = 600$$

بعد از چند ساعت استفاده از اینترنت، اشتراک نوع اول به صرفه خواهد بود؟

بعد از ۳ ساعت زیرا با توجه به نمودار، از نقطه برخورد به بعد هزینه اشتراک نوع اول پائین تر است.



$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲- معادله $y=2x-1$ چند جواب دارد؟ خیلی زیاد

نمودار آن را رسم کنید.

(b) عرض از مبدا = -1

(a) شیب = $2 = \frac{2}{1}$

معادله $y=-x+2$ چند جواب دارد؟ خیلی زیاد

نمودار آن را رسم کنید.

(b) عرض از مبدا = 2

(a) شیب = $-1 = -\frac{1}{1}$

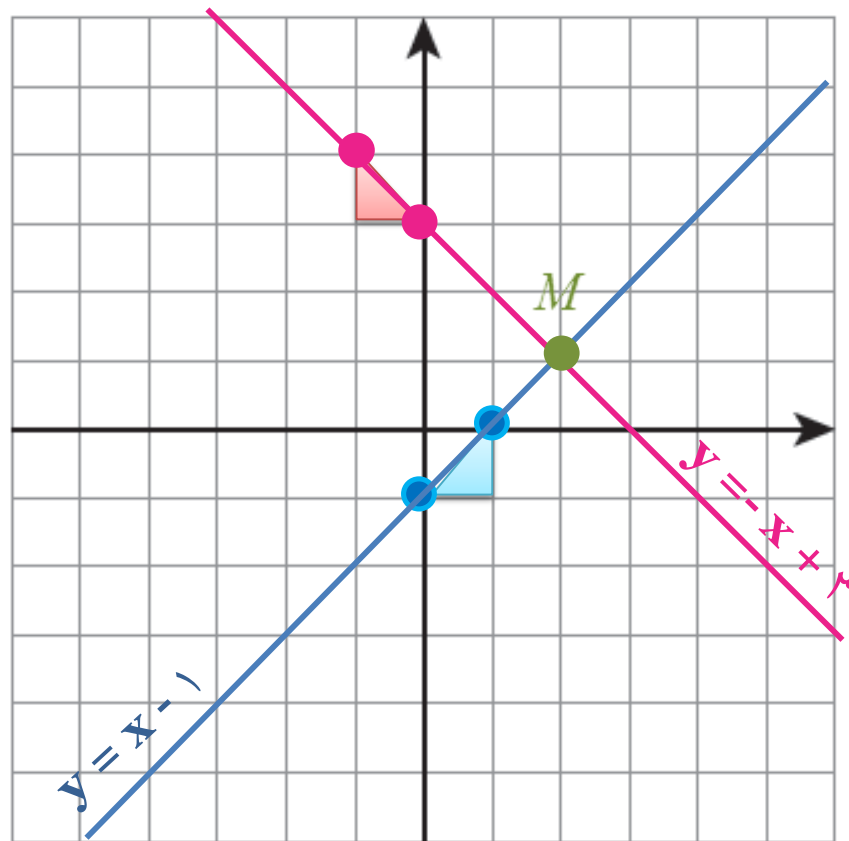
توضیح دهید چگونه یک جواب مشترک برای این دو معادله پیدا می کنید .

در روش ترسیمی (رسم خط) : جواب مشترک دو معادله محل برخورد دو خط است .

با رسم خط‌ها، دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید؛ یعنی یک جواب مشترک برای دو معادله پیدا کنید.

$$\begin{cases} x - y = 1 \longrightarrow y = x - 1 \\ x + y = 3 \longrightarrow y = -x + 3 \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



(b) عرض از مبدا = -1

(a) شیب = $1 = \frac{1}{1}$

(b) عرض از مبدا = 3

(a) شیب = $-1 = \frac{-1}{1}$

با رسم خطها، دستگاه معادله های خطی زیر را حل کنید؛ یعنی یک جواب مشترک برای دو

معادله پیدا کنید.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

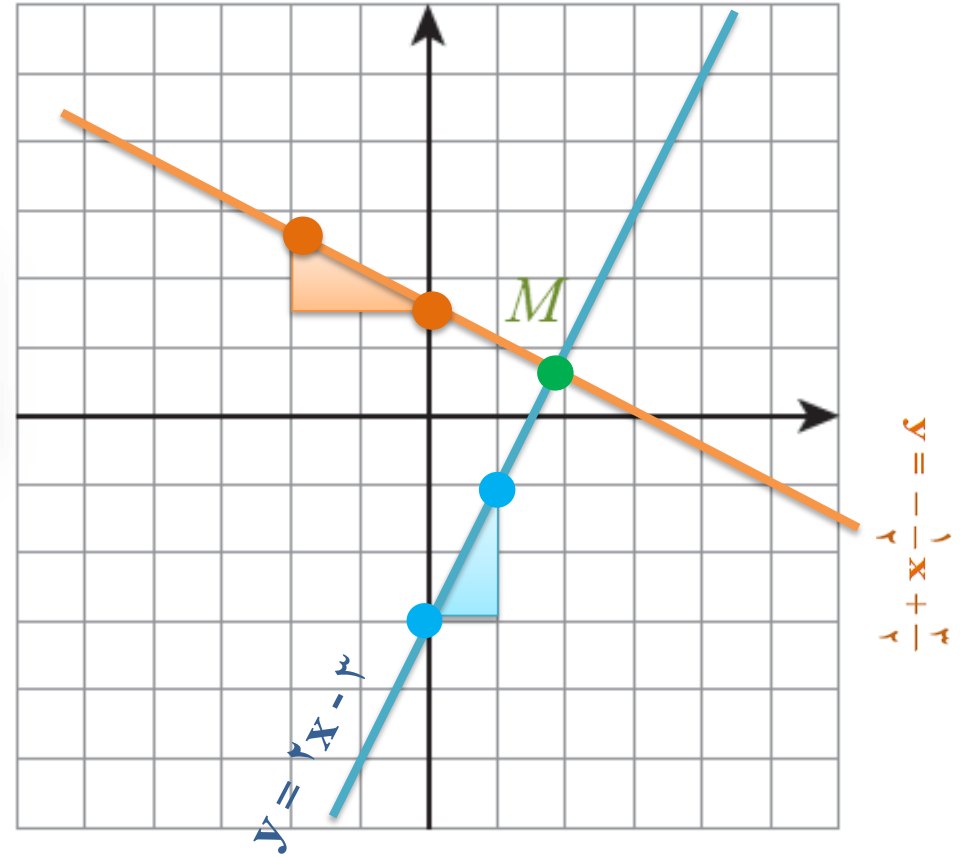
طول و عرض نقطه عدد صحیح نیست. یعنی برای پیدا کردن جواب مشترک برای دو معادله ترسیم روش مناسبی نیست.

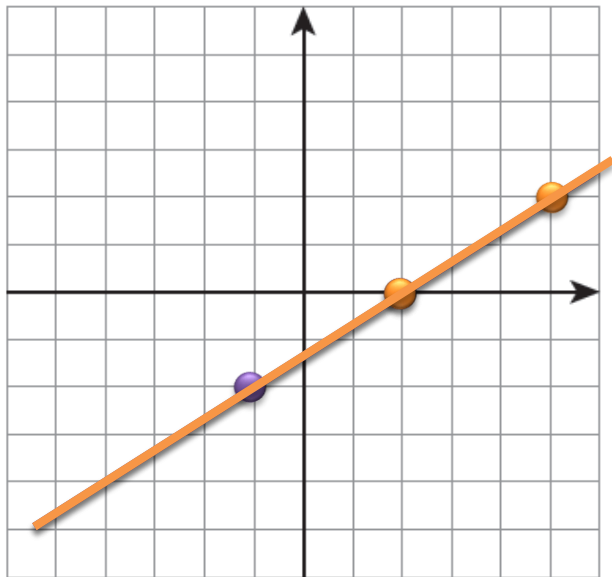
(b) عرض از مبدا = -3

(a) شیب = 2 = $\frac{2}{1}$ $M = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

(b) عرض از مبدا = $\frac{3}{2}$

(a) شیب = $-\frac{1}{2}$





۱- خط $2x - 3y = 4$ را رسم کنید. خط به معادله $4x - 6y = 8$ را که در آن تمام عددهای معادله بالا دو برابر شده است، رسم کنید.

$$2x - 3y = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x - 6y = 8 \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به روش
نقطه یابی

الف) آیا خط جدیدی به دست آمد؟ **خیر**

ب) چه نتیجه ای می گیرید؟ اگر تمام ضرایب های عددی یک معادله خط را در یک عدد ضرب کنیم **خط جدیدی به وجود نمی آید.**

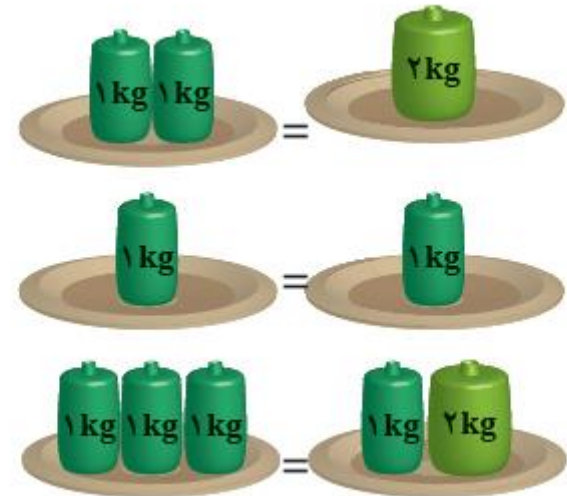
ج) آیا می توان گفت این دستگاه معادله خطی بی شمار جواب

دارد؟ چرا؟ **بله زیرا دو خط بر هم منطبق هستند بنابراین بی شمار نقطه برخورد (مشترک) دارند. یعنی دستگاه بی شمار جواب دارد.**

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$$

۲- به مثال های زیر توجه کنید :

شکل



ج)

جبري

$$\begin{aligned} x &= x \\ \text{ب) } + 2x &= 2x \\ \hline 3x &= 3x \end{aligned}$$

عددي

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ \text{الف) } + 5 &= 5 \\ \hline 7 &= 7 \end{aligned}$$

از این مثال چه نتیجه ای می گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، عبارت به وجود آمده یک تساوی است.

۳- با توجه به نتیجه هایی که از سؤال های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله های زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

الف) می توانیم دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم و یک تساوی جدید بنویسیم.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x - y = 1 \\ + \quad x + y = 3 \\ \hline 2x = 4 \end{array} \longrightarrow x = \frac{4}{2} \longrightarrow x = 2$$

تساوی جدید یک معادله است که با حل آن، مقدار یکی از متغیرها به دست می آید.

$$x + y = 3 \longrightarrow 2 + y = 3 \longrightarrow y = 3 - 2 \longrightarrow y = 1$$

جواب دستگاه :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری متغیر به دست آمده در یکی از معادلات خطی و حل معادله آن مقدار متغیر دیگر به دست می آید.

۳- با توجه به نتیجه هایی که از سؤال های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله های زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

ب)
$$2 \times \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

می توانیم تمام ضرایب معادله خط را در عددی ضرب کنیم (تمام ضرایب معادله اول را در عدد ۲ ضرب کردیم).

می توانیم دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم و یک تساوی جدید بنویسیم.

$$5x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{5} \rightarrow x = 2$$

تساوی جدید یک معادله است که با حل آن، مقدار یکی از متغیرها به دست می آید.

$$x + 2y = 4 \rightarrow 2 + 2y = 4 \rightarrow 2y = 4 - 2 = 2 \rightarrow y = \frac{2}{2} = 1$$

جواب دستگاه:
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری متغیر به دست آمده در یکی از معادلات خطی و حل معادله آن مقدار متغیر دیگر به دست می آید.

می توانیم تمام ضرایب یک یا هر دو معادله خط را در عددهای ضرب کنیم تا ضرایب یکی از متغیرها در دو معادله قرینه شوند.

دو طرف دو معادله های جدید را با هم جمع کنیم و یک معادله یک مجهولی بدست می آید .

که با حل معادله یک مجهولی ، مقدار یکی از متغیرها به دست می آید .

با جایگذاری متغیر به دست آمده در یکی از معادلات خطی و حل آن مقدار متغیر دیگر به دست می آید .

یکی از راه های حل کردن دستگاه معادله های خطی، حذف کردن x یا y است تا به یک معادله یک مجهولی برسیم؛ نام این روش، حذفی است.

دستگاه های معادله های خطی زیر را حل کنید.

$$۱) \quad ۲ \times \begin{cases} x - y = ۳ \\ ۴x + ۲y = ۶ \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} ۲x - ۲y = ۶ \\ ۴x + ۲y = ۶ \end{cases}$$

$$6x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{6} \rightarrow x = 2$$

$$x - y = 3 \rightarrow 2 - y = 3 \rightarrow y = 2 - 3 = -1 \rightarrow y = -1$$

جواب دستگاه :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

دستگاه های معادله های خطی زیر را حل کنید.

$$2) \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{red arrow}} \begin{cases} 9x - 15y = 3 \\ 10x + 15y = 35 \end{cases}$$

$$19x = 38 \rightarrow x = \frac{38}{19} \rightarrow x = 2$$

$$3x - 5y = 1 \rightarrow 3(\cancel{2}) - 5y = 1 \rightarrow -5y = 1 - 6 = -5 \rightarrow y = \frac{-5}{-5}$$

جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow y = 1$$

دستگاه های معادله های خطی زیر را حل کنید.

$$3) \begin{cases} 3x + 2y = 50 \\ 2x + 2y = 35 \end{cases} \xrightarrow{-1 \times} \begin{cases} 3x + 2y = 50 \\ -2x - 2y = -35 \end{cases}$$

$$x = 15$$

$$3x + 2y = 50 \rightarrow \overset{45}{3(15)} + 2y = 50 \rightarrow 2y = 50 - 45 = 5 \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

جواب دستگاه :

$$\begin{bmatrix} 15 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

۱- دستگاه معادله‌های خطی زیر را به روش دیگری نیز می‌توان حل کرد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(راهنمایی: هدف این است که به یک معادله یک مجهولی برسیم؛ بنابراین مقدار y را از معادله پایین در معادله بالا قرار دهید تا یک معادله یک مجهولی به دست آید؛ نام این روش، جایگزینی است).

$$2x - 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 5 \rightarrow x + 2 = 5 \rightarrow x = 3$$

$-1x + 2$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(3) - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3}$$

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش آموز حل شده است. روش های هر کدام را توضیح دهید و کامل کنید.

روش ۱: $۳ - ۲x$: طول مستطیل و x : عرض مستطیل

$$۲۴ = ۲(x + ۲x - ۳) \rightarrow ۲(۳x - ۳) = ۲۴ \rightarrow ۶x - ۶ = ۲۴$$

$$\rightarrow ۶x = ۲۴ + ۶ = ۳۰ \rightarrow x = \frac{۳۰}{۶} = ۵ \rightarrow \text{عرض مستطیل} = ۵$$

$$۳ - ۲x = ۲(۵) - ۳ = ۱۰ - ۳ = ۷ \text{ : طول مستطیل}$$

ابتدا طول و عرض مستطیل را بر حسب متغیر (x) نوشته و با توجه به رابطه محیط مستطیل یک معادله تشکیل داده است. سپس مقدار عرض (x) را بدست آورده و با توجه به اینکه طول مستطیل از دو برابر عرض ۳ سانتی متر کم تر است طول را حساب کرده است.

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش آموز حل شده است. روش های هر کدام را توضیح دهید و کامل کنید.

روش ۲: **۷** : طول مستطیل و **۵** : عرض مستطیل

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases}$$

$$-y - 2y = 3 - 24 \rightarrow -3y = -21 \rightarrow y = \frac{-21}{-3} = 7$$

$$2x - \cancel{y}^7 = 3 \rightarrow 2x = 3 + 7 = 10 \rightarrow x = \frac{10}{2} = 5$$

ابتدا عرض و طول مستطیل را با دو متغیر (x و y) معرفی کرده است و با توجه به اینکه طول مستطیل از دو برابر عرض ۳ سانتی متر کم تر است و رابطه محیط مستطیل دو معادله تشکیل داده است. سپس با حل دستگاه به روش حذفی مقدار طول و عرض را پیدا کرده است.

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش آموز حل شده است. روش های هر کدام را توضیح دهید و کامل کنید.

روش ۳: **۷** : طول مستطیل و **۵** : عرض مستطیل

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \rightarrow 2(x + \cancel{2x - 3}) = 24 \rightarrow 6x - 6 = 24$$

$$\rightarrow 6x = 24 + 6 = 30 \rightarrow x = \frac{30}{6} = 5$$

$$y = 2x - 3 \rightarrow y = 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7 \quad y = 7$$

مانند روش دوم ابتدا دستگاه معادله خطی تشکیل داده است. سپس با حل دستگاه به روش جایگزینی مقدار طول و عرض را پیدا کرده است.

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش آموز حل شده است. روش های هر کدام را توضیح دهید و کامل کنید.

بین روش های اول و سوم چه شباهتی هست؟

در روش سوم: برای عرض متغیر x و برای طول متغیر y را انتخاب کرده و با حل دستگاه به روش جایگزینی به جای طول (y) عبارت $3 - 2x$ جایگزین نموده است

در روش اول: از همان ابتدا به جای طول، عبارت $3 - 2x$ را قرار داده و به روش حل معادله ابتدا عرض و سپس طول را محاسبه نموده است.

دستگاه‌های زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

$$۱) \begin{cases} x - ۳y = ۷ \rightarrow x = ۳y + ۷ \\ ۲x - ۷y = ۱۵ \end{cases}$$

$$۲x - ۷y = ۱۵ \rightarrow ۲(\cancel{۳y + ۷}) - ۷y = ۱۵ \rightarrow -y + ۱۴ = ۱۵$$

$$\rightarrow -y = ۱۵ - ۱۴ = ۱ \rightarrow y = -۱$$

$$x = ۳y + ۷ = ۳(-۱) + ۷ = -۳ + ۷ = ۴ \rightarrow x = ۴$$

جواب دستگاه :

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

دستگاه‌های زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

$$2) \begin{cases} 3x - y = 6 \rightarrow y = 3x - 6 \\ 2x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases} \rightarrow 2x + \frac{1}{3}(3x - 6) = 8 \rightarrow 3x - 2 = 8$$

$$\rightarrow 3x = 8 + 2 = 10 \rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$y = 3x - 6 = 3\left(\frac{10}{3}\right) - 6 = 10 - 6 = 4 \rightarrow y = 4$$

جواب دستگاه :

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 4 \end{bmatrix}$$