



خط و معادله های خطی

درس اول : معادله خط

درس دوم : شیب خط و عرض از مبدا

درس سوم : دستگاه معادله های خطی

کاربرد هندسه و خط ها در فرش بافی، نگارگری، خطاطی، گچ بری، تذهیب و ... غیر قابل انکار و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خطوط برای ایجاد زاویه ها و جدا سازی فضاها استفاده های فراوان می شود.



۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

الف) $y = \frac{1}{2}x$

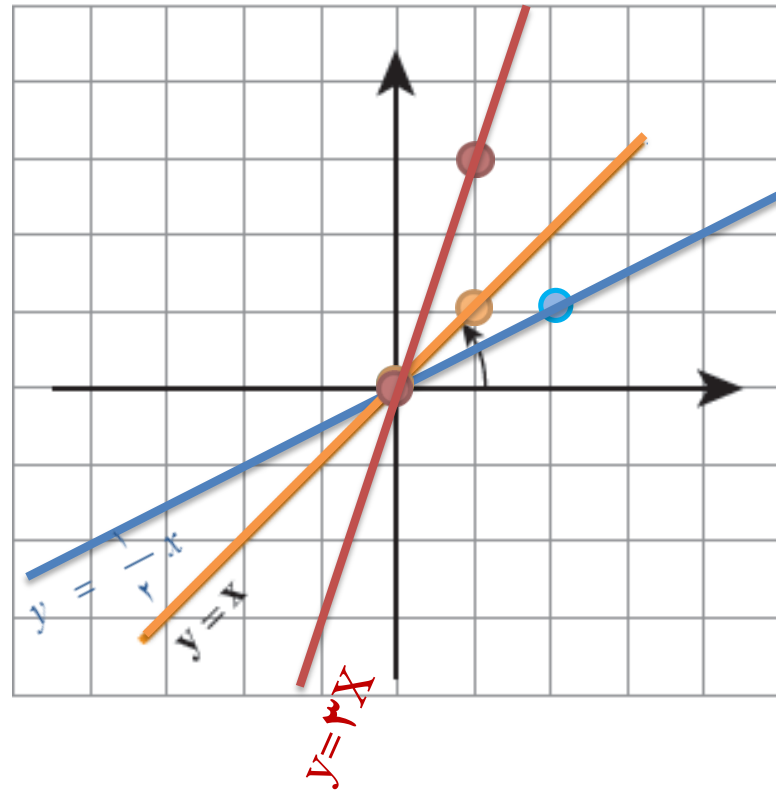
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

ب) $y = x$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

ج) $y = 3x$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$



۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک

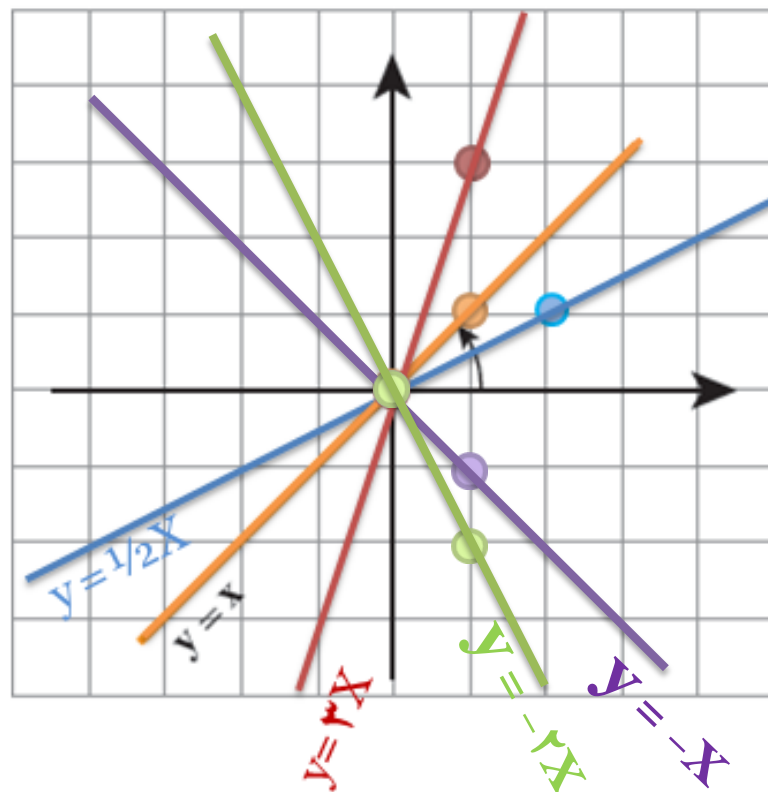
رنگ بکشید.

د) $y = -x$

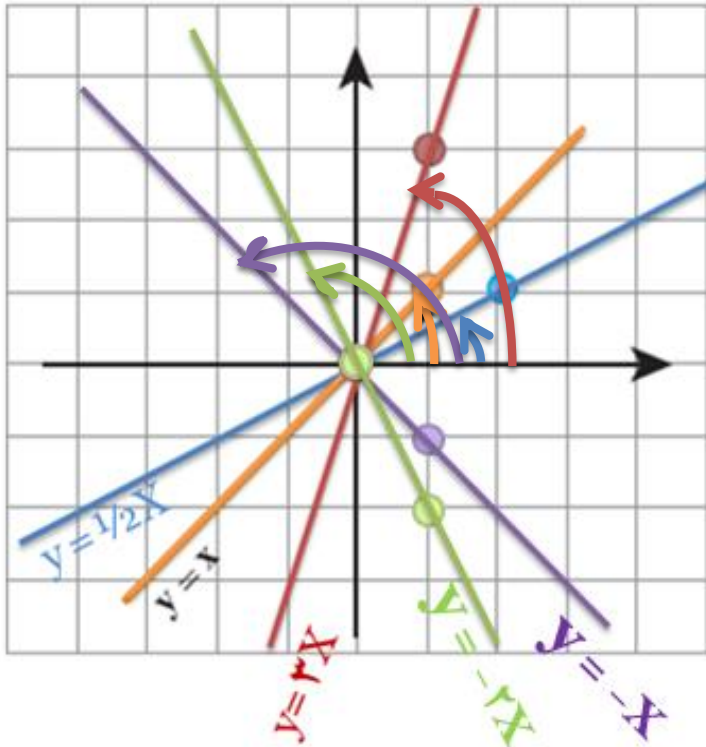
$$\begin{cases} x = \diamond \\ y = \diamond \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

هـ) $y = -2x$

$$\begin{cases} x = \diamond \\ y = \diamond \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$



تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؛ تفاوت آنها در چیست؟



تفاوت آنها در زاویه ای است که هر خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد

زاویه هر خط را مانند نمونه با قسمت مثبت محور طول‌ها مشخص کنید.

در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای

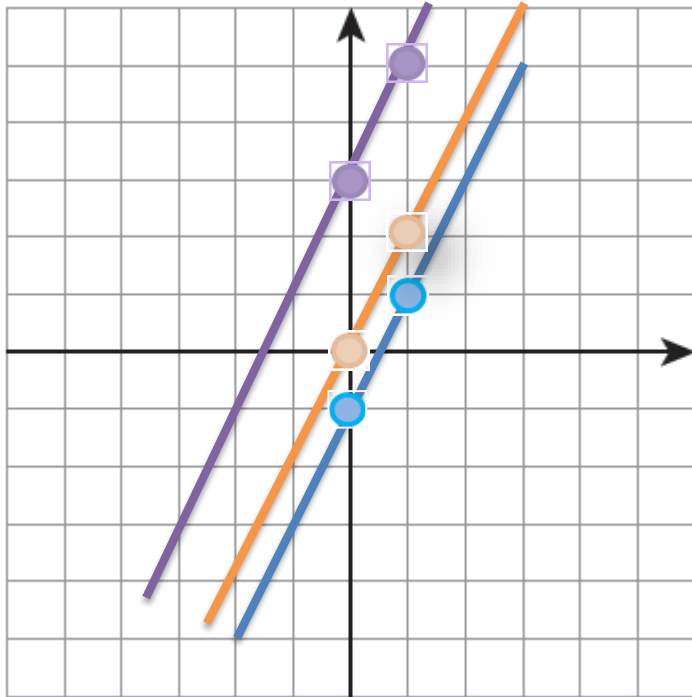
بین ضریب x و این زاویه وجود دارد؟

هر چه ضریب x بزرگتر شده زاویه نیز بزرگتر شده است.

خط‌های د و ه چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور

x می‌سازد؟ **زاویه باز**

۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.



$$y = 2x - 1 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = 2x \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y = 2x + 3 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

تفاوت خط‌ها در چیست؟

محل برخورد با محور عرض‌ها متفاوت است.

در معادله این خط‌ها ضریب x برابر با ۲ است که به آن شیب خط می‌گوییم.

$$y=2x-1, \quad y=2x, \quad y=2x+3$$

زاویه خط‌ها را با محور x ‌ها با هم مقایسه کنید؛

اندازه سه زاویه با هم مساویست .

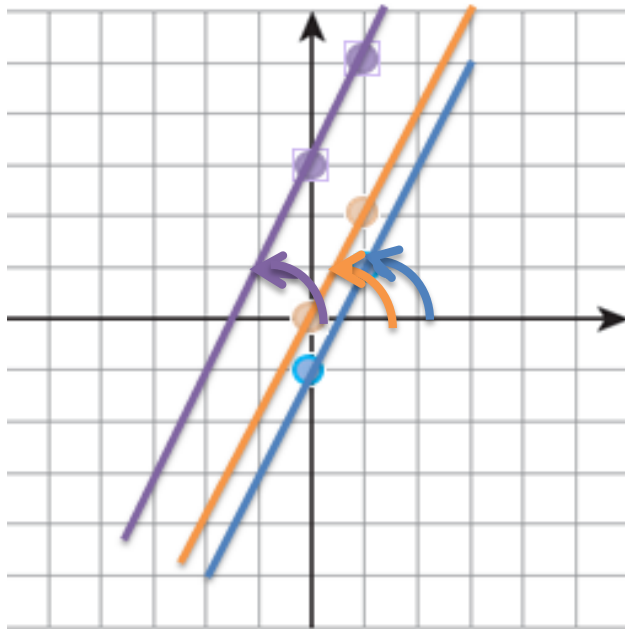
چرا این خط‌ها با هم موازی‌اند؟

زیرا شیب هر سه خط با هم مساوی‌اند.

بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد

ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟

عدد ثابت نشان دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌هاست



در معادله خط $y = ax + b$ ، عدد a ، شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر a زاویه خط

با جهت مثبت محور طول‌ها تغییر می‌کند. عدد b نشان دهنده محل برخورد خط با محور

عرض‌هاست؛ به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

به عنوان مثال در خط به معادله $y = -3x + 2$ ، عرض از مبدأ ۲ و شیب خط، -۳ است.

۱- در هر یک از معادله‌های زیر، شیب و عرض از مبدأ خط را مشخص کنید.

$$y = 2x - 4$$

Diagram: The equation $y = 2x - 4$ is shown with red dashed boxes around the coefficient 2 and the constant -4. An arrow labeled 'a' points to the coefficient 2, and an arrow labeled 'b' points to the constant -4.

عرض از مبدأ = -4

شیب = 2

$$y = -\frac{2}{3}x + 0$$

Diagram: The equation $y = -\frac{2}{3}x + 0$ is shown with red dashed boxes around the coefficient $-\frac{2}{3}$ and the constant 0. An arrow labeled 'a' points to the coefficient $-\frac{2}{3}$, and an arrow labeled 'b' points to the constant 0.

عرض از مبدأ = 0 (ندارد)

شیب = $-\frac{2}{3}$

$$y = -3x + 1$$

Diagram: The equation $y = -3x + 1$ is shown with red dashed boxes around the coefficient -3 and the constant 1. An arrow labeled 'a' points to the coefficient -3, and an arrow labeled 'b' points to the constant 1.

عرض از مبدأ = 1

شیب = -3

۲- معادله خطی را بنویسید که :

الف) شیب آن -2 و عرض از مبدأ آن -1 باشد.

$$y = ax + b$$

$$y = -2x - 1$$

b

a

ب) شیب آن $\frac{1}{2}$ باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض 3 قطع کند.

$$y = ax + b$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

b

a

ج) با خط $y = 2x + 1$ موازی باشد و از نقطه $(0, 4)$ بگذرد.

$$y = ax + b$$

$$y = 2x + 4$$

b = 4

a

دو خط در صورتی موازیند که شیب‌هایشان با هم مساوی باشد

۳- معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد. $b = ?$

$$y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \rightarrow 2 = 2 \times 1 + b \rightarrow b = \diamond$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 ۲ ۲ ۱

↑

جایگذاری مختصات نقطه داده شده در معادله خط

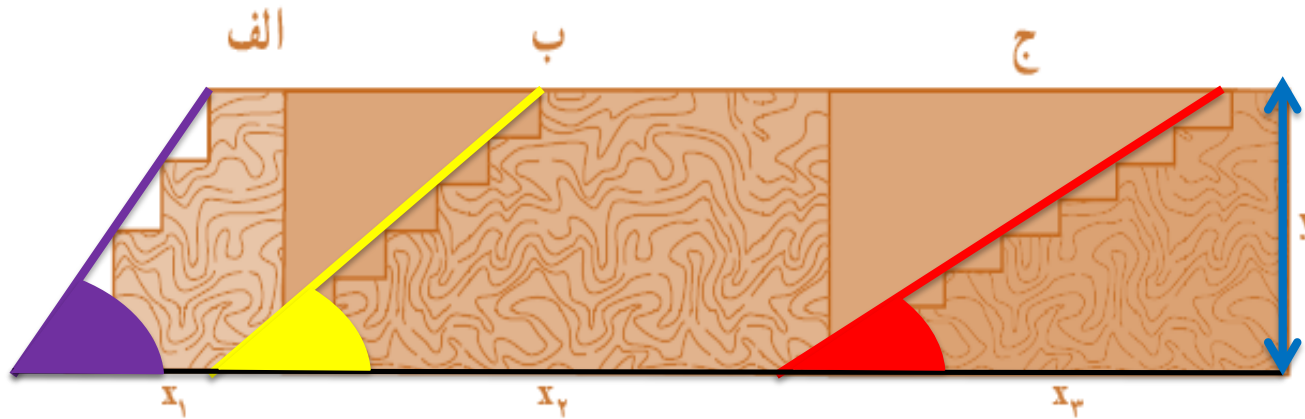
↙ معادله خط

ساد باشد

$$y = 2x$$

جایگذاری مختصات نقطه داده شده در معادله خط:
یعنی در معادله خط به جای x و y طول و عرض نقطه داده شده را قرار دهید.

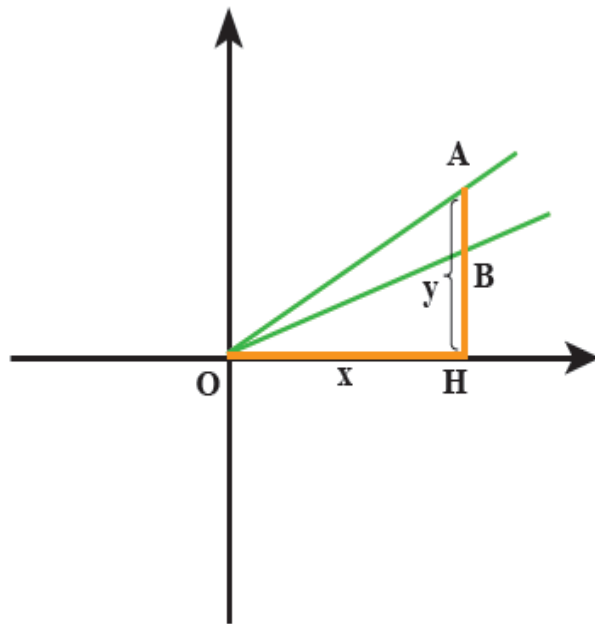
۱- در تصویر زیر، سه نوع راه پله می بینید؛ در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می روید، یکسان است.



کدام راه پله شیب بیشتری دارد؟ (الف)

کدام یک، تعداد پله، بیشتری دارد؟ (ج)

بالا رفتن از کدام یک ساده تر است؟ (ج)



۲- در محورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب بیشتری دارد؟

خطی که از مبدا و نقطه A رسم شده شیب بیشتری دارد.

نقطه‌های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آنها متفاوت است.

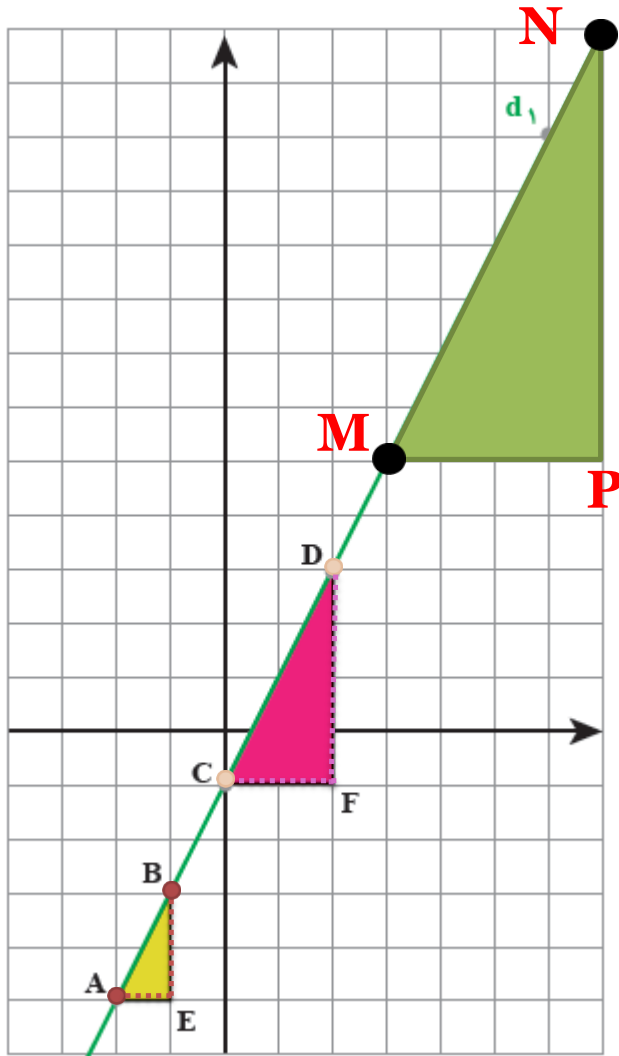
کدام یک از دو نسبت زیر بزرگ‌تر است؟ چرا؟

مخرج دو نسبت مساوی اند و چون $AH > BH$ است بنابراین:

$$\frac{AH}{OH} > \frac{BH}{OH}$$

این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خط‌ها دارد؟

نسبت‌ها نشان دهنده شیب خط‌ها هستند. نسبت بزرگ‌تر یعنی شیب خط بیشتر است.



۳- روی خط d_1 به معادله $y = 2x - 1$ دو نقطه دلخواه مثل A و B در نظر گرفته ایم. با توجه به مثلث قائم الزاویه ایجاد شده، شیب خط را به دست آورده ایم.

$$\text{شیب خط } d_1 = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{1} = 2$$

برای دو نقطه C و D نیز با توجه به مثلث رسم شده،

$$\text{شیب خط را پیدا کنید. } \text{شیب خط } d_1 = \frac{FD}{FC} = \frac{4}{2} = 2$$

دو نقطه دلخواه دیگر روی خط در نظر بگیرید و با رسم یک مثلث قائم الزاویه شیب خط را دوباره پیدا کنید.

$$\text{شیب خط } d_1 = \frac{PN}{PM} = \frac{4}{2} = 2$$

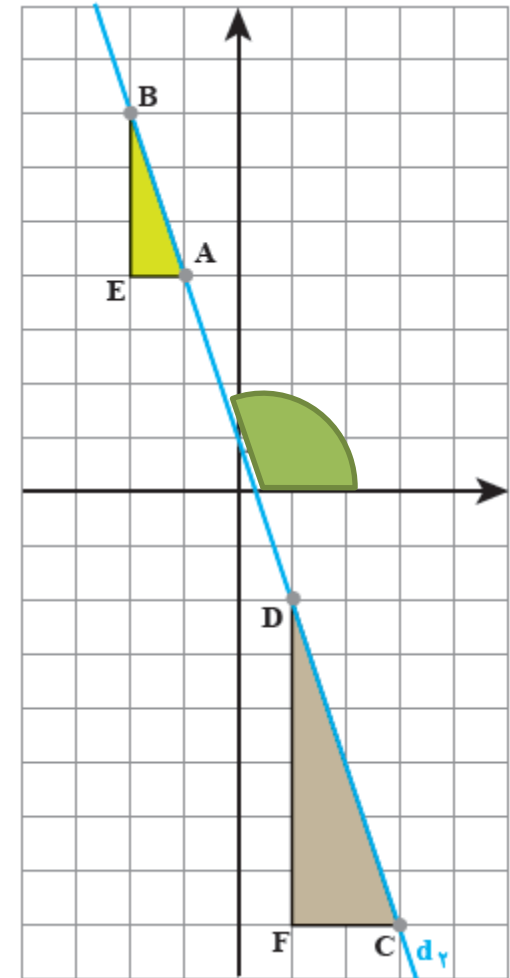
درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ

۴- خط d_2 با محور طول، زاویه بزرگ‌تر از 90° می‌سازد؛ پس شیب خط، منفی می‌شود. با توجه به مثلث‌های رسم شده مقدار شیب خط d_2 را پیدا کنید.

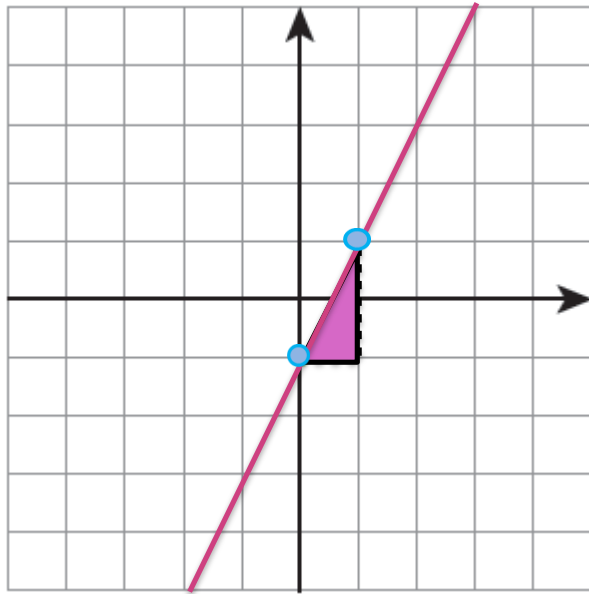
$$\text{شیب خط } d_2 = -\frac{EB}{EA} = -\frac{3}{1} = -3 \rightarrow a = -3$$

خط d_2 محور عرض‌ها را در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ قطع کرده است یا عرض از مبدأ آن ۱ است. $b = 1$

معادله خط d_2 را بنویسید. $y = -3x + 1$



۵- با توجه به این بیان از شیب خط، در زیر مراحل رسم معادله خط $y = 2x - 1$ با روش دیگری مشخص شده است؛ این روش را توضیح دهید.



\downarrow \downarrow
a b

(۱) خط از این نقطه می‌گذرد.

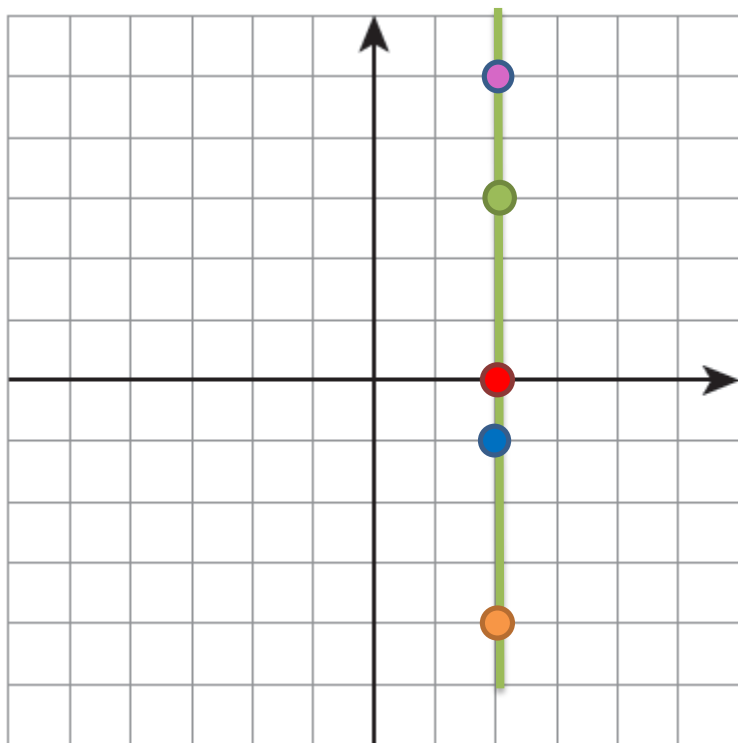
در معادله خط داده شده عدد b (عرض از مبدا) برابر با -1 است. یعنی خط از نقطه -1 محور عرض ها می‌گذرد.

(۲) با توجه به مقدار شیب نقطه دیگر پیدا می‌شود.

شیب خط $= \frac{2}{1}$ ، پس نسبت ضلع عمودی به ضلع افقی مثلث قائم الزاویه 2 به 1 است

(۳) با داشتن دو نقطه خط رسم می‌شود.

دو نقطه را به هم وصل کرده و امتداد می‌دهیم



۱- نقطه‌های $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات نشان دهید و خطی را رسم کنید که از این دو نقطه می‌گذرد.

روی خط، دو نقطه انتخاب کنید و مختصات آنها را بنویسید. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

اگر نقطه دیگری روی این خط در نظر بگیریم،

طول آن برابر است با: ۲ **معادله خط‌های موازی محور yها : عدد ثابت = x**

یک نقطه دلخواه به طول ۲ بنویسید و روی محور مختصات نشان دهید: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

تمام نقطه‌ها به طول ۲ روی خط بالا قرار می‌گیرند و معادله آنها به صورت $x=2$ است.

۲- صورت کلی معادله‌های خطی به صورت $ax+by=c$ است.

الف) با توجه به مقدارهای نوشته شده، معادله خط را بنویسید؛ کدام خط از مبدأ می‌گذرد؟

$$a=2, b=3, c=4 \rightarrow 2x + 3y = 4$$

$$a=-1, b=2, c=0 \rightarrow -1x + 2y = 0 \rightarrow 2y = 1x \rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

مبدأ گذر

$$y = \frac{1}{2}x$$

ب) با توجه به خط‌های داده شده، مقدارهای a ، b و c را پیدا کنید.

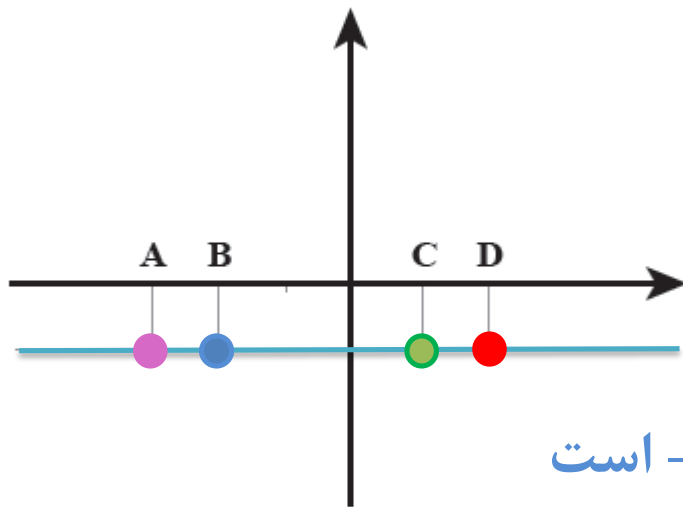
$$-3x + 2y = 2 \rightarrow a = -3, b = 2, c = 2$$

$$-2x + 1y = 1 \rightarrow a = -2, b = 1, c = 1$$

ج) برای خط $x=2$ مقدارهای a ، b و c را بنویسید.

$$1x + 0y = 2 \rightarrow x = 2$$

۳- مختصات نقطه‌های مشخص شده را روی خط بنویسید.



$$A = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ عرض همه نقاط -1 است

معادله خط رسم شده را بنویسید. $y = -1$

در شکل کلی معادله‌های خطی به جای a ، b و c چه عددهایی قرار دهیم تا معادله خط رسم شده

به دست آید؟ $\diamond x + 1 y = -1 \rightarrow y = -1$

معادله خط‌های موازی محور x ها : عدد ثابت $y =$

۴- مانند نمونه برای خط‌های داده شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید.

$$2y - 4x = 8 \rightarrow 2y = 4x + 8 \rightarrow y = \frac{4}{2}x + \frac{8}{2} \rightarrow y = 2x + 4$$

شیب \nearrow
 عرض از مبدأ \nearrow

$$3x - 2y = 6 \rightarrow \frac{-2}{-2}y = \frac{-3}{-2}x + \frac{6}{-2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$$

شیب \nearrow
 عرض از مبدأ \nearrow

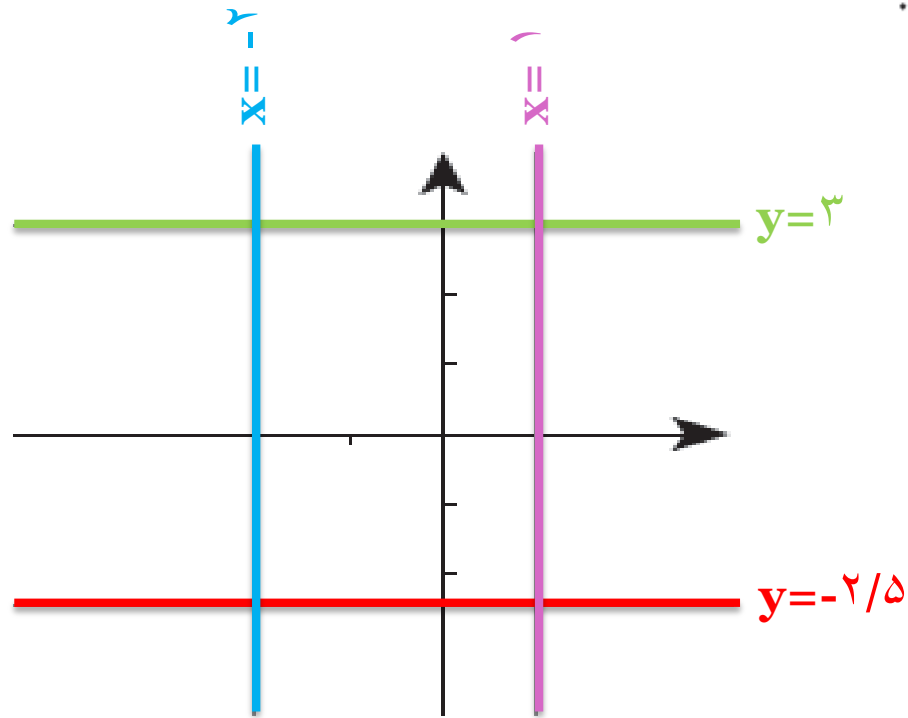
$$x + 3y - 9 = 0 \rightarrow 3y + 1x = 9 \rightarrow \frac{3}{3}y = \frac{-1}{3}x + \frac{9}{3}$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 3$$

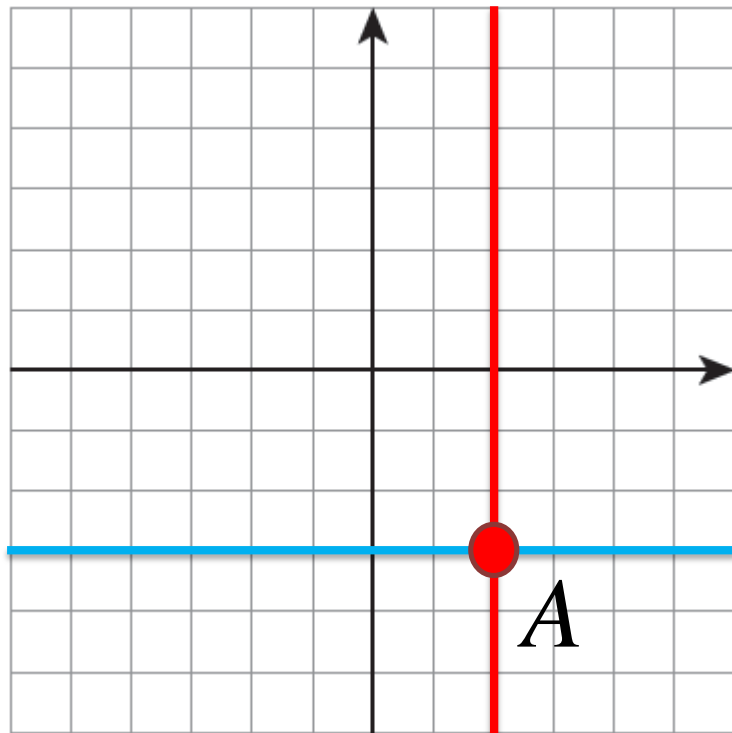
شیب \nearrow
 عرض از مبدأ \nearrow

۱- معادله‌های خط‌های رسم شده را در دستگاه مختصات مقابل

کنار هر کدام بنویسید.



۲- از برخورد دو خط $x=2$ و $y=-3$ کدام نقطه به دست می آید؟



$$x = 2$$

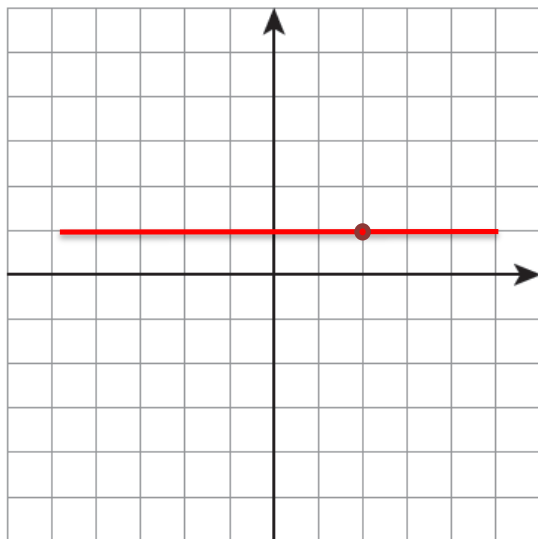
$$y = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

یا با رسم شکل

۳- معادله‌ای خطی بنویسید که موازی محور x ها باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

معادله خط‌های موازی محور x ها : عدد ثابت $y =$



$y = 1$: معادله خط

یا با رسم شکل

ساده‌تر