



خط و معادله های خطی

درس اول : معادله خط

درس دوم : شیب خط و عرض از مبدا

درس سوم : دستگاه معادله های خطی

کاربرد هندسه و خط ها در فرش بافی، نگارگری، خطاطی، گچ بری، تذهیب و ... غیر قابل انکار و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خطوط برای ایجاد زاویه ها و جدا سازی فضاها استفاده های فراوان می شود.



درس اوّل: معادله خط



وقتی دوچرخه سواری در حال حرکت است، بین زمان و مسافتی که او طی می‌کند، رابطه‌ای وجود دارد. بین زمان سوختن شمع و کوتاه شدن آن نیز رابطه‌ای دیده می‌شود. در الگوی عددی زیر نیز بین هر جمله و شماره آن رابطه‌ای هست که به صورت $n \rightarrow 2n$ نمایش داده شده است:

۱	۲	۳	۴	...	n
↓	↓	↓	↓		↓
۲	۴	۶	۸	...	2n

دو چرخه سواری با سرعت ثابت دو متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه دو متر را طی می کند. جدول زیر را کامل کنید.

زمان (ثانیه) x	۰	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت (متر) y	۰	۲	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰

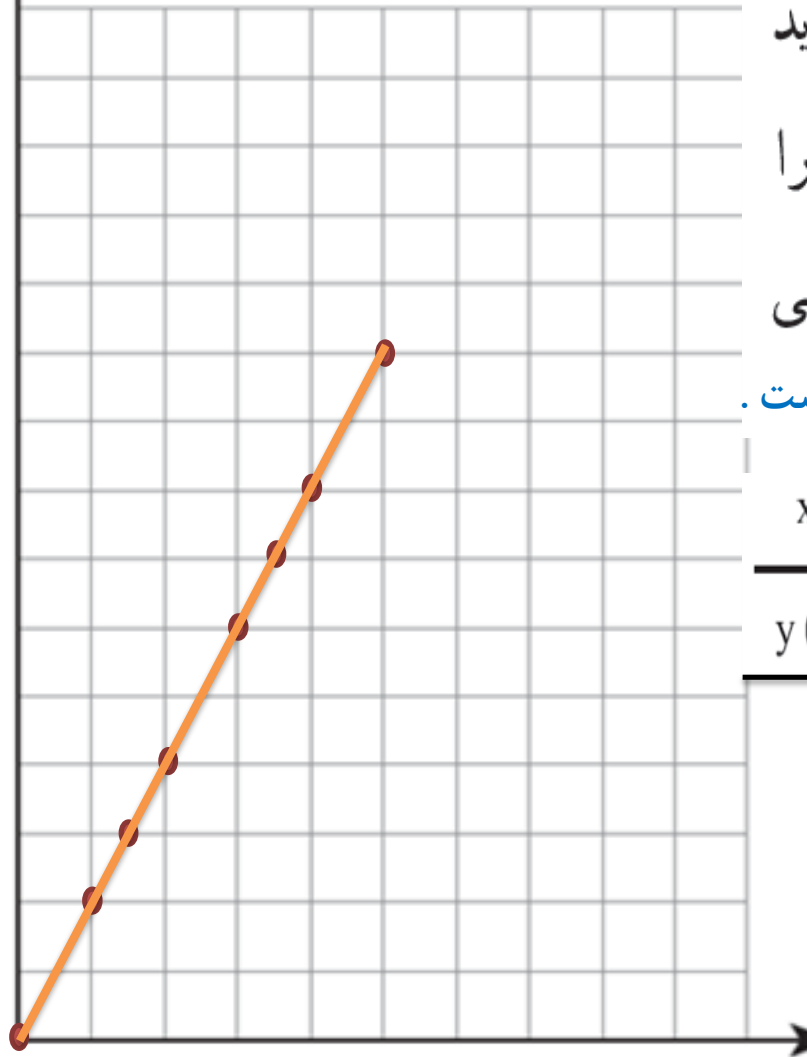
بین زمان و مسافت طی شده چه رابطه‌ای

هست؟ مسافت طی شده دو برابر زمان است

$$2 \times 100 = 200$$

پس از ۱۰۰ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟ ۲۰۰ متر

اگر x ثانیه بگذرد، چه مسافتی طی شده است؟ ۲x



زوج عددهایی را که در جدول به دست آوردید و به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان دهید و نمایش هر نقطه را روی نمودار مشخص کنید؛ این نقطه ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ عرض هر نقطه دو برابر طول همان نقطه است.

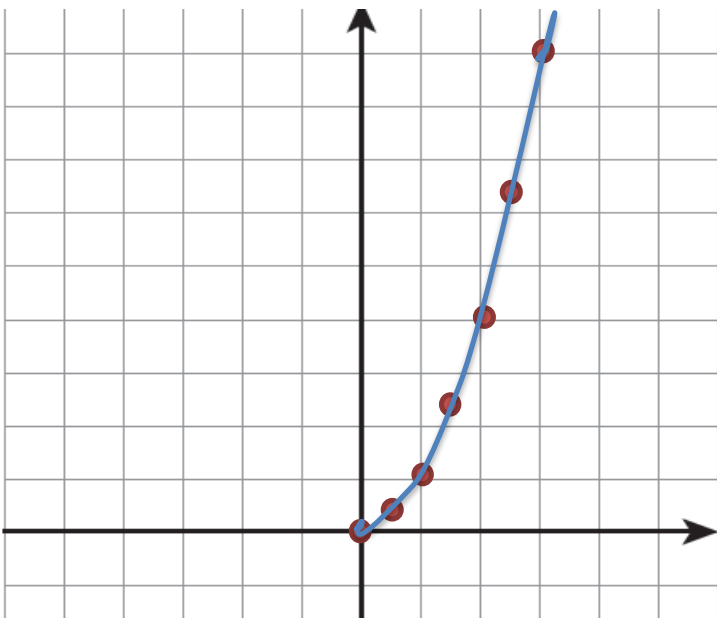
زمان (ثانیه) x	۰	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت (متر) y	۰	۲	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/5 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3/5 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

اگر این نقطه ها را به هم وصل کنیم، چه شکلی به دست می آید؟ خط راست

۱- اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین x و y هست؟

$$\begin{array}{l} \text{ضلع (x)} \rightarrow \\ \text{محیط (y)} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 2 \\ 8 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 4 \\ 16 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 100 \\ 400 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} x \\ 4x \end{array} \right] \end{array} \quad y = \frac{4x}{1}$$

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟
خیر



ضلع x (سانتیمتر)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت y (سانتیمتر مربع)	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵	۹
نقطه‌ها	$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} 0/5 \\ 0/25 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} 1/5 \\ 2/25 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} 2/5 \\ 6/25 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} 3 \\ 9 \end{array} \right]$

۱- معادله $x+y=10$ چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید :

توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست ؟

زیرا این تساوی به ازای برخی مقادیر متغیرها درست است و به ازای همه مقادیر درست نیست.

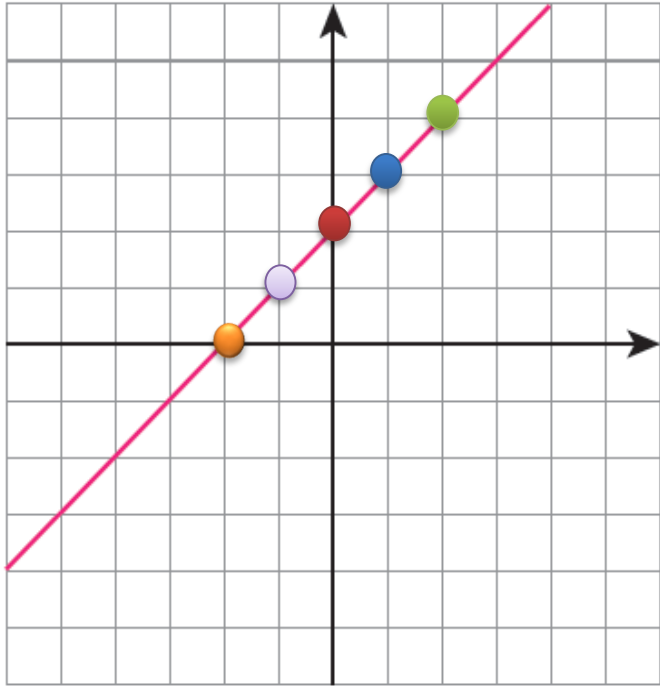
می دانیم : یک تساوی جبری در صورتی اتحاد است که به ازای تمام مقادیر متغیرها درست باشد.

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد؟

در معادله بالا به جای متغیر داده شده عدد قرار داده و متغیر خواسته شده بدست می‌آید.

آیا تساوی برای $x=2$ و $y=5$ برقرار است؟ خیر زیرا $2+5 \neq 10$

۲- در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را با توجه به نمودار خط کامل کنید.



x (طول نقطه)	۰	۱	-۱	۲	-۲
y (عرض نقطه)	۲	۳	۱	۴	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ عرض هر نقطه دو واحد از طول همان نقطه بیشتر است.

$$y = x + 2$$

این رابطه را به صورت یک معادله بنویسید.

۳- پنج جواب برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

$$3x - 4y = 12$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3(0) - 4y &= 12 \\ 0 - 4y &= 12 \\ y &= \frac{12}{-4} = -3 \end{aligned}$$

$$y = 2x - 1$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad y = 2(0) - 1 = -1$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x - 4(0) &= 12 \\ 3x - 0 &= 12 \\ x &= \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad y = 2(1) - 1 = 1$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3(-4) - 4y &= 12 \\ -12 - 4y &= 12 \\ -4y &= 12 + 12 = 24 \\ y &= \frac{24}{-4} = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad y = 2(2) - 1 = 3$$

$$3x - 4y = 12$$

$$y = 2x - 1$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3x - 4(3) = 12 \rightarrow 3x - 12 = 12 \\ 3x = 12 + 12 = 24 \rightarrow x = \frac{24}{3} = 8 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \quad y = 2(3) - 1 = 5$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3(1) - 4y = 12 \rightarrow 3 - 4y = 12 \\ -4y = 12 - 3 = 9 \rightarrow y = \frac{9}{-4} = -\frac{9}{4} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \quad y = 2(4) - 1 = 7$$

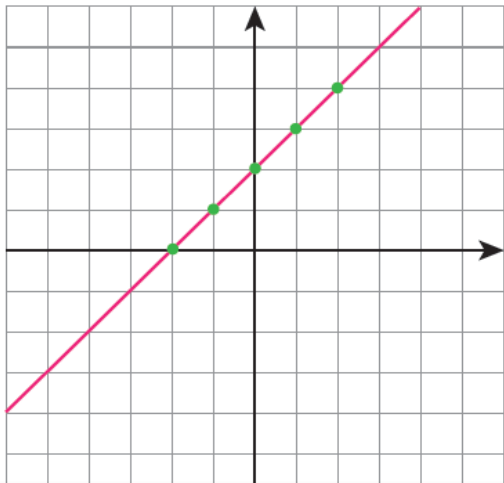
توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست ساده تر و سریع تر است یا در معادله سمت چپ؟ معادله سمت راست

زیرا با جایگذاری مقدار x به راحتی مقدار y به دست می آید.

نکته: در معادله سمت راست y بر حسب x نوشته شده است.

هر معادله به صورت کلی $y=ax+b$ معادله یک خط است؛ زیرا در صورتی که تمام پاسخ‌های آن معادله را به صورت نقطه روی دستگاه مختصات نمایش دهیم، شکل یک خط به دست می‌آید؛ به همین دلیل می‌گوییم x و y با هم رابطه خطی دارند. معادله بالا بی‌شمار جواب دارد؛ ولی اتحاد نیست.

به عنوان مثال $y=x+2$ معادله یک خط است که در آن $a=1$ و $b=2$ فرض شده است و نمودار آن را در بالا ملاحظه کردید.



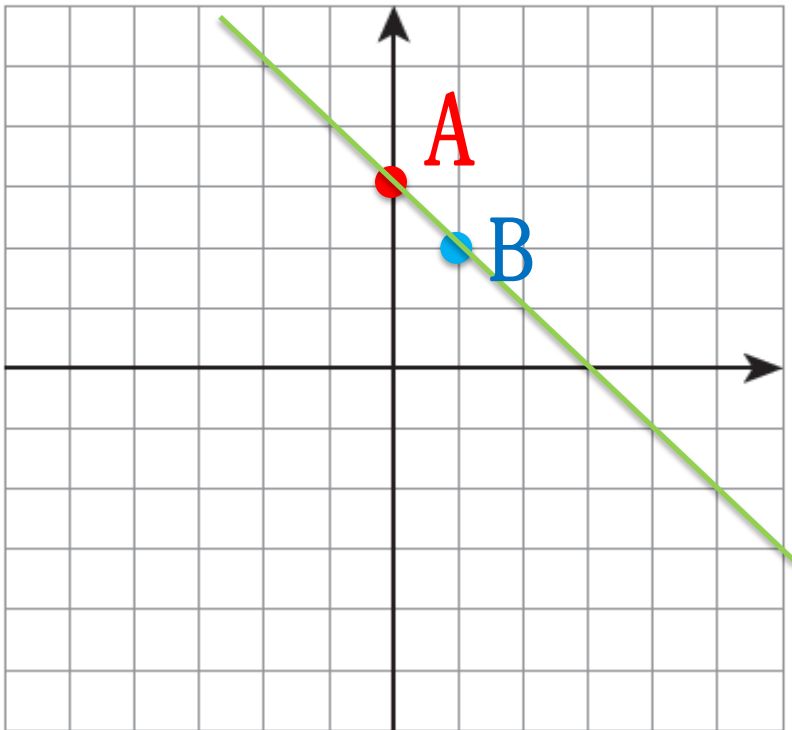
$$y = \boxed{1}x + \boxed{2}$$

\swarrow a
 \swarrow b

۱- نمودار خط‌های با معادله زیر را رسم کنید.

نکته: برای رسم خط پیدا کردن دو نقطه کافی است.

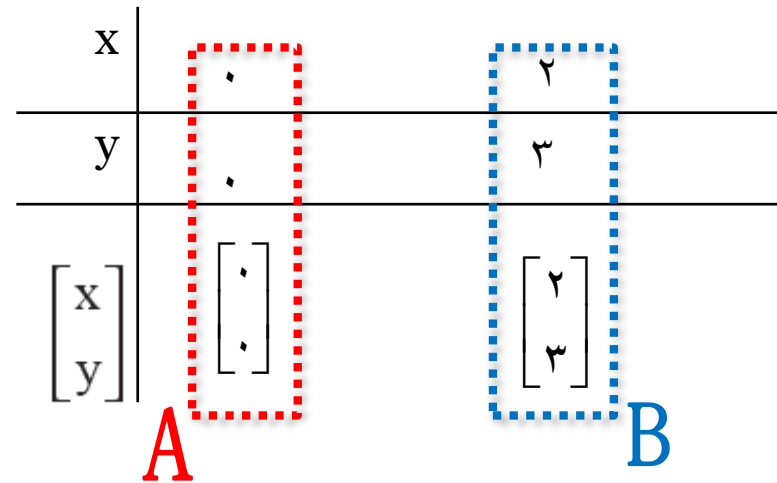
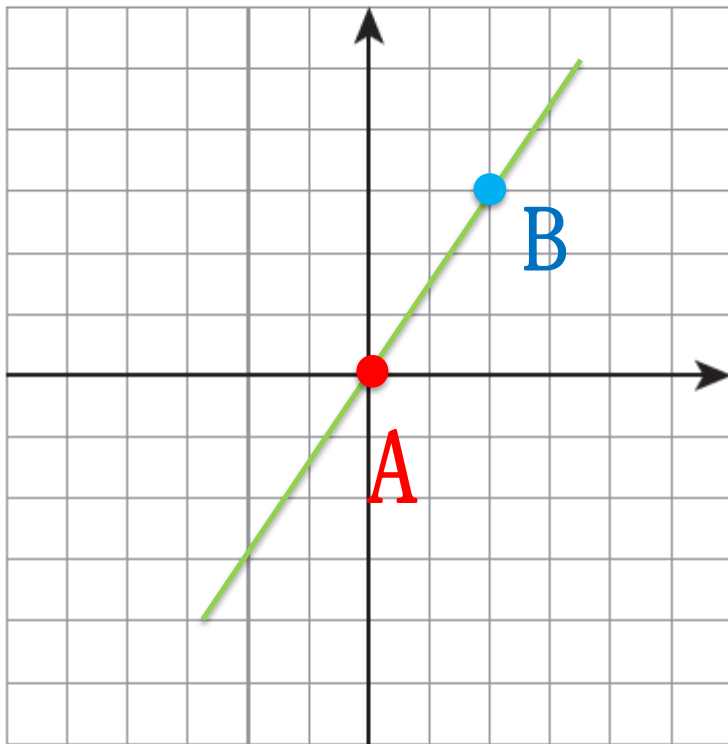
$$y = -x + 3$$



x	0	1
y	3	2
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
	A	B

۱- نمودار خط‌های با معادله زیر را رسم کنید.

$$y = \frac{3}{2}x$$



۲- آیا خط $y=3x$ از مبدأ مختصات (یعنی نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) می‌گذرد؟ چرا؟

بله زیرا اگر به جای x عدد صفر قرار دهیم مقدار y هم صفر بدست می‌آید.

۳- اگر در معادله $y=ax$ به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، بی‌شمار معادله خطی مانند $y=3x$ ،

$y=-x$ ، $y=2x$ و ... به دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؟

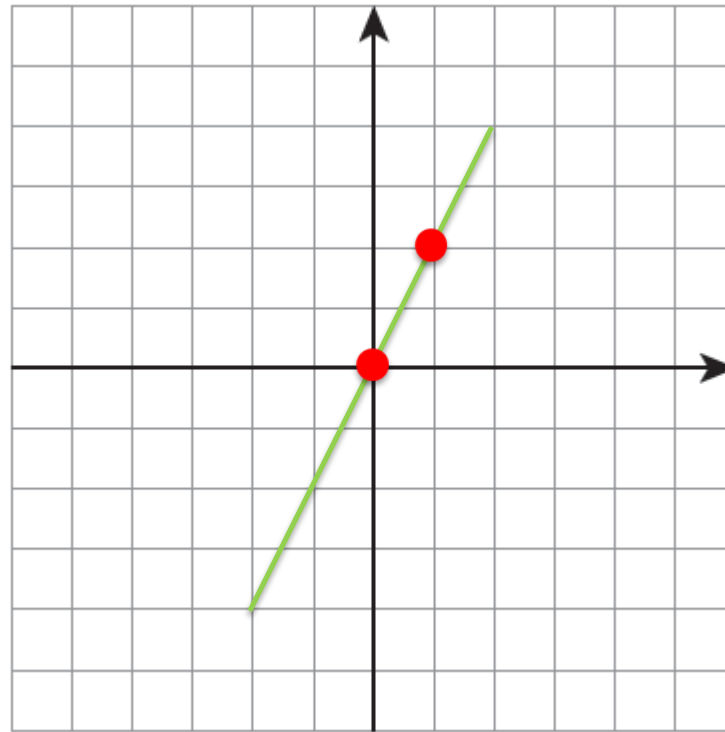
بله زیرا اگر به جای x عدد صفر قرار دهیم مقدار y هم صفر بدست می‌آید.

$y=ax$ صورت کلی معادله خط‌هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه با توجه به مختصات هر نقطه معادله خط را حدس بزنید.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y = 2x$$



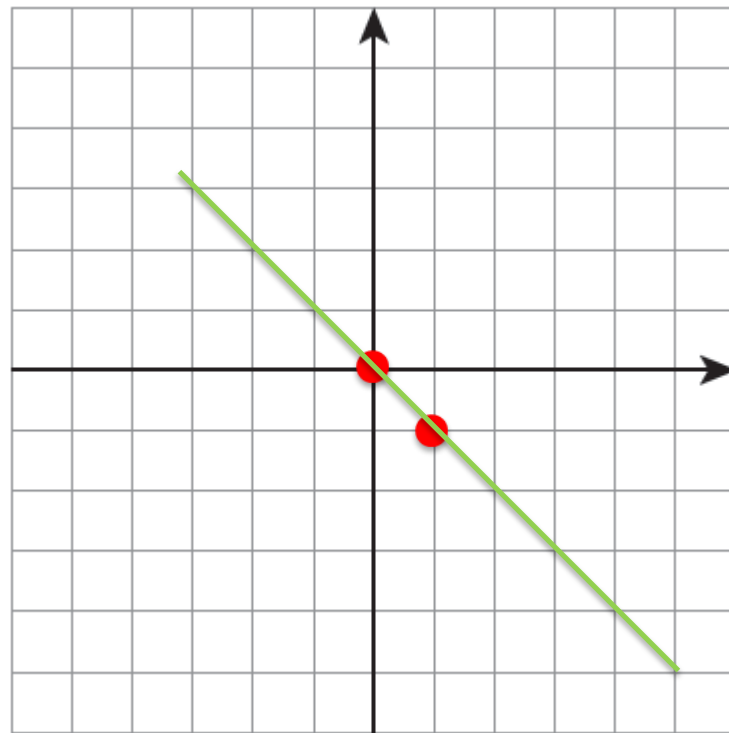
۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه با توجه به مختصات هر نقطه معادله خط را حدس بزنید.

الف) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$y = -1x$$

یا

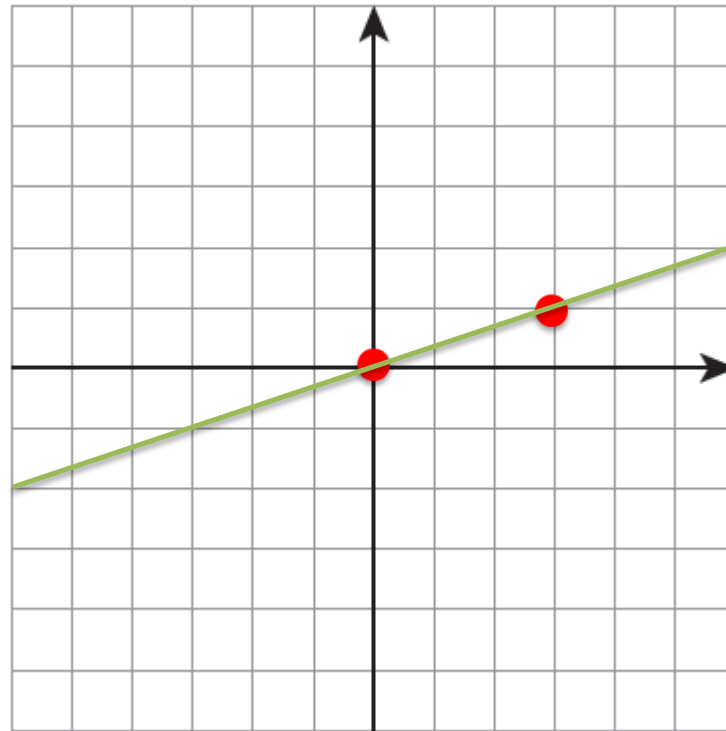
$$y = -x$$



۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه با توجه به مختصات هر نقطه معادله خط را حدس بزنید.

ب) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$y = \frac{1}{3}x$$



۲- در فعالیت ۱ برای هر مورد، مختصات دو نقطه دیگر را روی هر خط به دست آورید.

$$y = 2x$$

x	۲	-۱
y	۴	-۲
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$y = -x$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۳- در قسمت (ب) کدام یک از نقطه‌ها با مختصات $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 60 \\ 20 \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد؟

پس نقاط $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 60 \\ 20 \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد. $y = \frac{1}{3}x$ (ب)

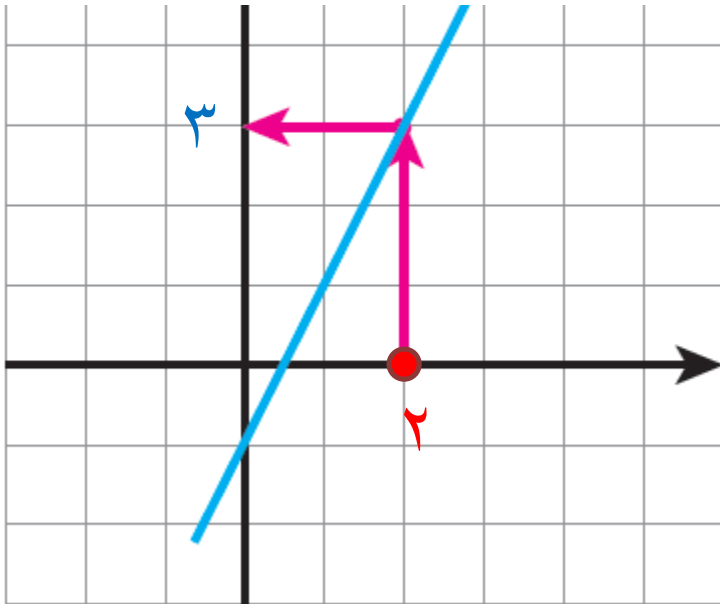
مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ در معادله خط صدق میکند. $\frac{1}{3} \times (x) = y$

مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ در معادله خط صدق نمی‌کند. $\frac{1}{3} \times (x) \neq y$

مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 60 \\ 20 \end{bmatrix}$ در معادله خط صدق میکند. $\frac{1}{3} \times (x) = y$

۱- مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی خط $y=2x-1$ پیدا کنید.

با استفاده از نمودار خط



$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

جواب:

با استفاده از معادله خط

$$y = 2x - 1$$

$$y = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

۲- مختصات نقطه‌ای به عرض ۳- را روی خط $y = -\frac{1}{2}x + 2$ پیدا کنید.

$$-\frac{1}{2}x + 2 = \underline{-3}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

جواب:

$$-\frac{1}{2}x = -3 - 2 = -5$$

$$x = -5 \div \left(-\frac{1}{2}\right) = -5 \times \left(-\frac{2}{1}\right) = \underline{10}$$

۳- مختصات محل برخورد خط $y=5x+1$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

نکته ۱: برای پیدا کردن محل برخورد خط با محور طول ها باید در معادله خط به جای y عدد صفر را قرار داده و مقدار x را با حل معادله بدست آورید.

$$5x + 1 = 0 \rightarrow 5x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

مختصات محل برخورد خط با محور طول ها :

نکته ۲: برای پیدا کردن محل برخورد خط با محور عرض ها باید در معادله خط به جای x عدد صفر را قرار داده و مقدار y را بدست آورید.

$$y = 5(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

ساد باشد

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مختصات محل برخورد خط با محور عرض ها :