



فصل ۵- درس اول پایه نهم

هر عبارت را، که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، تک جمله‌ای^۱ (یک جمله‌ای) می‌نامیم.
عبارت‌های زیر همگی تک جمله‌ای هستند.

$$7, x, 5x^1, -\sqrt{3}a^3x^2z, \frac{1}{5}xy, \pi x^2, 4z, -\frac{2}{7}$$

و عبارت‌های زیر تک جمله‌ای نیستند.

$$\frac{1}{x}, 3^x, 2\sqrt{x}, |x|, 2x^2+2x, \sqrt[3]{y}, 1+x$$

هرگاه قسمت‌های حرفی دو یا چند تک جمله‌ای یکسان باشند، به آنها تک جمله‌ای‌های متشابه گفته می‌شود؛ به عنوان مثال تک جمله‌ای‌های $4x^2y$ و $\frac{7}{2}x^2y$ و $-3x^2y$ متشابه‌اند، اما تک جمله‌ای‌های $3x^2$ و $3x$ متشابه نیستند.

۱- حاصل عبارتهای زیر را مانند نمونه به دست آورید :

$$۱) ۲(-۴x \times ۷x^۲) = ۲(-۲۸x^۳) = -۵۶x^۳$$

$$۲) \left(\frac{۲}{۳}x^۲y\right)^۳ = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۳ \cdot (x^۲)^۳ \cdot y^۳ = \frac{۸}{۲۷}x^۶y^۳$$

$$۳) (-۳x^۳)^۲ \left(\frac{1}{۳}x^۲\right)^۳ = (-۳)^۲(x^۳)^۲ \left(\frac{1}{۳}\right)^۳ (x^۲)^۳ = \cancel{9}(x^۶) \left(\frac{1}{\cancel{۲۷}}\right)(x^۶) = \frac{1}{۳}x^{1۲}$$

$$۴) \left(\frac{1}{\cancel{۲}}a^۲b\right)(ab)\left(\frac{\cancel{-۱}}{۷}a^۲c^۵\right) = -\frac{1}{۷}a^۵b^۲c^۵$$

$$۵) ۲(۵xy^۴)^۲(-۲x^۵y^۲) = ۲(۵^۲)(x)^۲(y^۴)^۲(-۲x^۵y^۲) = ۲(۲۵)x^۲y^۸(-۲x^۵y^۲) = -۱۰۰x^۷y^{1۰}$$

$$۶) \cancel{(۲x^۲y)(۳x^۳y^۴)} + xy^۲\cancel{(-۵x^۳y)} = ۶x^۴y^۴ - ۵x^۴y^۴ = x^۴y^۴$$

در تک جمله‌ای $5a^2x^3y$ ، توان متغیر a برابر با ۲ است؛ بنابراین درجهٔ این تک جمله‌ای نسبت به متغیر a ، برابر با ۲ است؛ به همین ترتیب درجه نسبت به x ، ۳ و درجه نسبت به y ، ۱ است. درجه نسبت به دو متغیر x و y را برابر با $1+3=4$ تعریف می‌کنیم.

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

تک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y
$\sqrt{3}a^3x^2y^4$	a, x, y	۲	۴	$۲+۴=۶$
$5x^2y^2z^4$	x, y, z	۲	۲	$۲+۲=۴$
$-۱۲x^3u$	x, u	۳	۰	$۳+۰=۳$
$\frac{۳}{۵}$	همه متغیرها با توان صفر	۰	۰	۰

تک جمله‌ای‌های $3x^2y^3$ و $-5x^3y^2$ را که متشابه نیستند، تک جمله‌ای‌های غیرمتشابه می‌گوییم.

چنانچه تعدادی تک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است.

چند جمله‌ای می‌تواند تک جمله‌ای یا جمع جبری چند تک جمله‌ای غیرمتشابه باشد؛ مانند:

$$4x^2 - 4x + 1, \quad x^2 - 2x, \quad \frac{2}{3}ax^2y - \frac{3}{2}axy^2 - axy, \quad 3x^4$$

در هر چند جمله‌ای، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر

تعریف می‌کنیم؛ برای مثال در چند جمله‌ای $-2xy^3 + x^2y - 1$ ، درجه نسبت به x برابر با ۲ و درجه

نسبت به y برابر با ۳ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ‌ترین درجه تک جمله‌ای‌های

آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می‌کنیم. در این مثال درجه نسبت به x و y برابر با ۴ است.

۳- چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید :

$$\text{الف) } 3x^2 + 5 - 2x + 2x^2 = 2x^2 + 3x^2 - 2x + 5$$

$$\text{ب) } \underline{-3bxy^2} + \underline{ax^2y} - \underline{4bx^2y^2} = -4bx^2y^2 + ax^2y - 3bxy^2$$

$$\text{ج) } \underline{\frac{1}{2}x^2y^2} - \underline{2xy^3} + \underline{3x^3y} - \underline{4} = +3x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy^3 - 4$$

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $-5a^2 - 3ax + x^2 - (4x^2 + 5ax - 3a^2) = -5a^2 - 3ax + x^2 - 4x^2 - 5ax + 3a^2 = -2a^2 - 8ax - 3x^2$

منفی در پرانتز ضرب می‌شود.

نسبت به x : $= -3x^2 - 8ax - 2a^2$

ب) $-5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - 3a^2 + 8ax] = -5a^2 - 3ax + x^2 - 4a^2 - 5ax + 3a^2 - 8ax =$

منفی در پرانتز ضرب می‌شود.

$-6a^2 - 16ax + x^2 = +x^2 - 16ax - 6a^2$

نسبت به x :

ج) $(4x + 5x^2)(x^2 - x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + 4x + 5x^5 - 5x^3 + 5x^2 = 5x^5 + 4x^3 - 5x^3 + x^2 + 4x$

نسبت به x :

د) $(x + x^2)(x^4 + x^2 + 1) = x^5 + x^3 + x + x^6 + x^4 + x^2 = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$

نسبت به x :

ه) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x^2 - 2) = x^4 + x^5 - 2x^2 - 2x^3 - 2x^4 + 4x + x^2 + x^3 - 2 = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 2$

فعالیت

$$\underbrace{(-2)^2}_{(2)} + 6\underbrace{(-2)}_{(2)} + 9 = \frac{11}{2}$$

۱- به ازای مقادیر داده شده برای x ، جدول زیر را کامل کنید :

x	x^2	$6x$	x^2+6x+9	$(x+3)^2$
۰	$0^2 = 0$	$6(0) = 0$	۹	۹
۵	$5^2 = 25$	$6(5) = 30$	۶۴	۶۴
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$	$6\left(\frac{3}{2}\right) = 9$	$\frac{81}{4}$	$\frac{81}{4}$
۲	$2^2 = 4$	$6(2) = 12$	۲۵	۲۵
-۲	$(-2)^2 = 4$	$6(-2) = -12$	۱	۱

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با

با هم مقایسه کن: $\left(\frac{3}{2} + 3\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$
با هم برابرند

حاصل عبارتهای جدول را برای چند مقدار

دیگر x ادامه دهید.

$$(-2 + 3)^2 = (1)^2 = 1$$

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

دو ستون آخر به ازای هر عددی با هم برابرند .

حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به دست آورید و آن را با عبارت جبری x^2+6x+9 مقایسه کنید. با هم برابرند

بنابراین برابری $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ یک اتحاد است. $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

برابری $3x-3 = x+1$ را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای $x=2$ ، به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 3 = 3(2) - 3 = 3 \\ x + 1 = (2) + 1 = 3 \end{array} \right\} 3=3$$

آیا این برابری یک اتحاد است؟ خیر. معادله است.

برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای x بررسی کنید. به ازای $x=1$ بررسی می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 3 = 3(1) - 3 = 0 \\ x + 1 = (1) + 1 = 2 \end{array} \right\} 0 \neq 2$$

همان‌طور که می‌دانید، به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

$$\text{الف) } (a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$$

$$\text{ب) } (5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2) = 25x^2 + 10x + 10x + 4 = 25x^2 + 20x + 4$$

$$\text{ج) } (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

۳- با دقت در برابری $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$ ، که در فعالیت ۲ به دست آمده است، به

سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

– جمله اول سمت راست برابری؛ یعنی $25x^2$ ، چه رابطه‌ای با $5x$ دارد؟ مربع $5x$ است.

– جمله دوم سمت راست برابری؛ یعنی $20x$ ، چه رابطه‌ای با $5x$ و 2 دارد؟ دو برابر حاصل ضرب عدد 2 در $5x$ است

– جمله سوم سمت راست برابری؛ یعنی 4 ، چه رابطه‌ای با 2 دارد؟ مربع عدد 2 است

عبارت جبری $5x+2$ دو جمله‌ای و $(5x+2)^2$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم.

برای سرعت بخشیدن به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد:

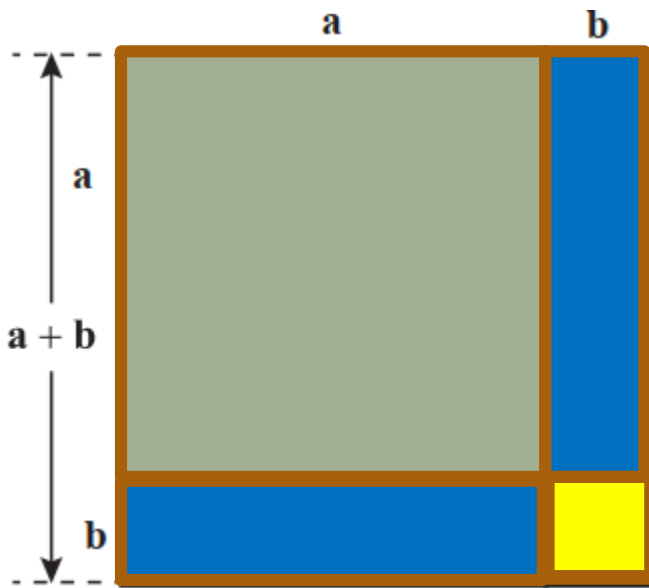
$$(5x + 2)^2 = (5x)^2 + \underbrace{2 \times 5x \times 2}_{\text{دو برابر حاصل ضرب دو جمله}} + 2^2$$

جمله دوم ← $(5x + 2)^2$
 جمله اول ← $(5x)^2$
 مربع جمله اول ← $(5x)^2$
 دو برابر حاصل ضرب دو جمله ← $2 \times 5x \times 2$
 مربع جمله دوم ← 2^2

برای هر دو عدد مثبت a و b ، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مقابل را نشان دهید.



$$\text{مساحت کل شکل} = (a+b)^2 = s_1 + 2s_2 + s_3$$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } (5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2) = 25x^2 - 10x - 10x + 4 = 25x^2 - 20x + 4$$

$$\text{ب) } (3-5x)^2 = (3-5x)(3-5x) = 9 - 15x - 15x + 25x^2 = 9 - 30x + 25x^2$$

$$\text{ج) } (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ارتباط بین جملات به دست آمده در طرف راست تساوی‌های بالا و جملات عبارت داده شده

در سمت چپ آنها را بیان کنید.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مربع جمله دوم $(-b)$

مربع جمله اول (a)

دو برابر جمله اول (a) × جمله دوم (b)

اتحاد مربع دو جمله‌ای :

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

$$\text{الف) } (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\text{ب) } (4a+3b)^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2$$

$$\text{ج) } \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{د) } \left(2xy - \frac{1}{2}x^3\right)^2 = 4x^2y^2 - 2x^4y + \frac{1}{4}x^6$$

$$\text{ه) } (\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 = 2 + 6\sqrt{6} + 27 = 29 + 6\sqrt{6}$$

$$\text{و) } (5 - 2\sqrt{2})^2 = 25 - 20\sqrt{2} + 8 = 33 - 20\sqrt{2}$$

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

$$(\dots + \underline{3b^2})^2 = \underline{4a^2} + \dots + \underline{9b^4}$$

↙ جمله اول
↘ جمله دوم
↙ مربع
↘ دو برابر
 مربع جمله دوم حاصل ضرب جمله اول جمله ها

$$2a = \text{جمله اول} \Rightarrow (2a)^2 = 4a^2 = \text{مربع جمله اول}$$

$$2(2a)(3b^2) = 12ab^2 = \text{دو برابر حاصل ضرب جمله ها}$$

در نتیجه داریم:

$$(2a + 3b^2)^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^4$$

$$\text{ب) } \left(xy - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2y^2 - xy + \frac{1}{4}$$

$$\text{الف) } (1+b)^2 = 1 + 2b + b^2$$

$$\text{ج) } \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 - 2 + \frac{1}{x^4} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{د) } (6x - y)^2 = 36x^2 - 12xy + y^2$$

در سال گذشته خاصیت پخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع را در چند جمله‌ای‌ها خوانده‌اید.

$$\xrightarrow{\text{حاصل ضرب}} \\ a(b+c) = ab+ac$$

اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای $ab+ac$ را به ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم:

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ ab+ac = a(b+c)$$

(ب.م.م) بزرگ‌ترین مقسوم علیه (عامل) مشترک

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید :

$$\text{الف) } 8x^2 + 12x = 4x \cdot 2x + 4x \cdot 3$$

$$= 4x(2x + 3)$$

$$\text{(ب.م.م.)} = 4x$$

(با توجه به خاصیت پخش‌ی)

$$\text{ب) } 6a^4 - 18a^3 = 6a^3(a - 3)$$

$$\text{ج) } 7x^4 - 14x^3 + 21x^2 = 7x^2(x^2 - 2x + 3)$$

$$\text{د) } 5x^2y - 10xy^2 + 15x^2y = 5x^2y - 10xy^2 = 5xy(2x - 2y)$$

اگر سه جمله‌ای $a^2 + 2ab + b^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $(a+b)^2$ بنویسیم، در واقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده‌ایم؛ زیرا:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b) \end{array}$$

با توجه به نمونه زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را

تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

$$\text{الف) } x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = (x+3)(x+3)$$

مربع کامل (۳) $2(x)$ مربع کامل

$$\text{ب) } x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = (x-2)(x-2)$$

$$\text{ج) } n^2 - 10n + 25 = (n - 5)^2 = (n - 5)(n - 5)$$

$$\text{د) } 4ax^2 + 12axy + 9ay^2 = 2a(2x^2 + 6xy + 3y^2) = 2a(2x + 3y)^2 =$$

(ب.م.م) = 2a

$$2a(2x + 3y)(2x + 3y)$$

ساد باشد