

بہ نام خدا

پایہ نہم - فصل ۴ - درس اول

درس اول : توان صحیح

درس اول: توان صحیح

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اید؛ به طور مثال می‌دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-1}{32}$$

همچنین می‌دانید که اگر a عددی غیر صفر باشد، $a^0=1$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل 2^{-3} چیست؟ به کمک فعالیت زیر

پاسخ این سؤال را می‌توان پیدا کرد:

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$
۲ ^۴	۲ ^۳	۲ ^۲	۲ ^۱	۲ ^۰	۲ ^(-۱)	۲ ^(-۲)	۲ ^(-۳)	۲ ^(-۴)	۲ ^(-۵)

- الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارند؟ هر عدد نصف عدد قبلی است.
- ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟ برابر است.
- ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا 2^0 با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟ یکی یکی کم می‌شود.
- د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

هـ) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5}$$

به طور کلی اگر a یک عدد غیرصفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال:

الف) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ج) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$

ب) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

د) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان‌دار با توان

طبیعی بنویسید :

$$\text{الف) } 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

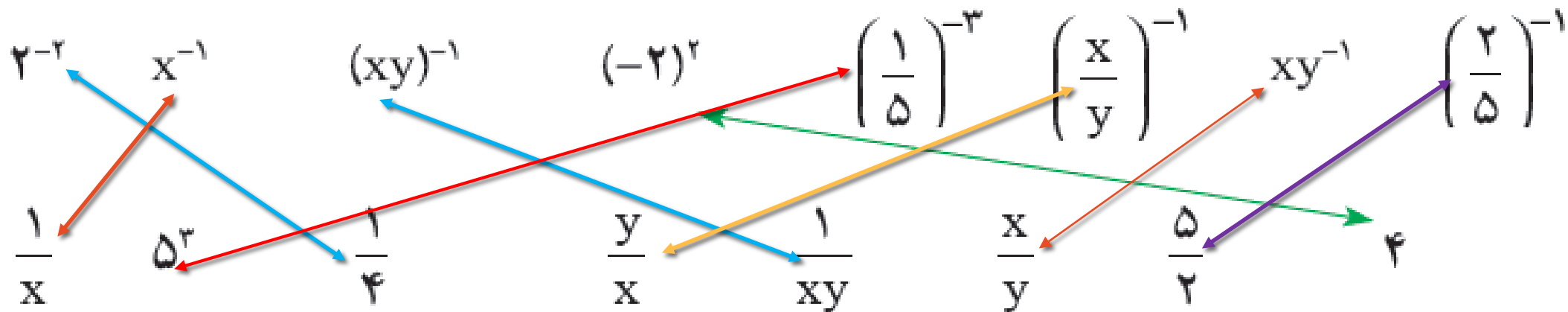
$$\text{ب) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\text{ج) } (-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = \frac{1}{-216} = \left(-\frac{1}{6}\right)^3$$

$$\text{د) } \left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{7}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{2401}} = \frac{2401}{16} = \left(-\frac{7}{2}\right)^4$$

به طور کلی اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ آن‌گاه : $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- عبارتهای برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید : $(x \neq 0, y \neq 0)$



۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

الف) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = (-3)^4 = 3^4$

و) $1^{-2} = 1^2 = 1$

ب) $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$

ز) $\frac{(-3)^0}{3} = \frac{1}{3}$

ج) $-(-5)^2 = -25$

ح) $-\frac{1}{2^{-2}} = -2^2 = -4$

$$\text{د) } -(-5)^{-2} = -\frac{1}{(-5)^2} = -\frac{1}{25}$$

$$\text{ه) } -5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$$

$$\text{ط) } \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

$$\text{ی) } 2^0 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، و a یک عدد دلخواه باشد، داریم: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟

با فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای عددهای صحیح هم حدس زد.

فعالیت

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در ضرب دو عدد تواندار با توان‌های صحیح پایه را نوشته توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^3 \times 5^{-7} = 5^{3+(-7)} = 5^{-4}$$

در حالت کلی اگر m و n دو عدد صحیح باشند و a یک عدد دلخواه (غیرصفر)،

رابطه زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال :

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-2} = 2^{3-5-2} = 2^{-4}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^2) \times (4x^3) = 24x^{-1+2+3} = 24x^4 \quad (x \neq 0)$$

کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید : $(b, x, y \neq 0)$

$$5^{-2} \times 5^{10} = 5^8$$

$$(-4)^{-3} \times (-4)^{-1} = (-4)^{-4}$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} = \left(\frac{-3}{8}\right)^{-5}$$

$$(\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^{-2} = (\sqrt{2})^2$$

$$b^{-2} \times b^{-3} = b^{-5}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \left(\frac{x}{y}\right)^6$$

اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشند، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n} ; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} ; \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ;$$

$$(a^m)^n = a^{mn} ; (ab)^m = a^m \cdot b^m ; \quad a^0 = 1$$

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $\frac{7^3}{7^5} = 7^{-2}$

ب) $2^{-2} \times 5^{-2} = 10^{-2}$

ج) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times 12^{-3} = (-8)^{-3}$

د) $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^2$

ه) $\frac{2^8 \times 5^{10}}{2^4 \times 5^6} = \frac{2^8}{2^4} \times \frac{5^{10}}{5^6} = 2^4 \times 5^4 = 10^4$

و) $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-3} = x^7 \cdot y^{-5} \cdot z^{-2} \quad x, y, z \neq 0$

ساد باشد