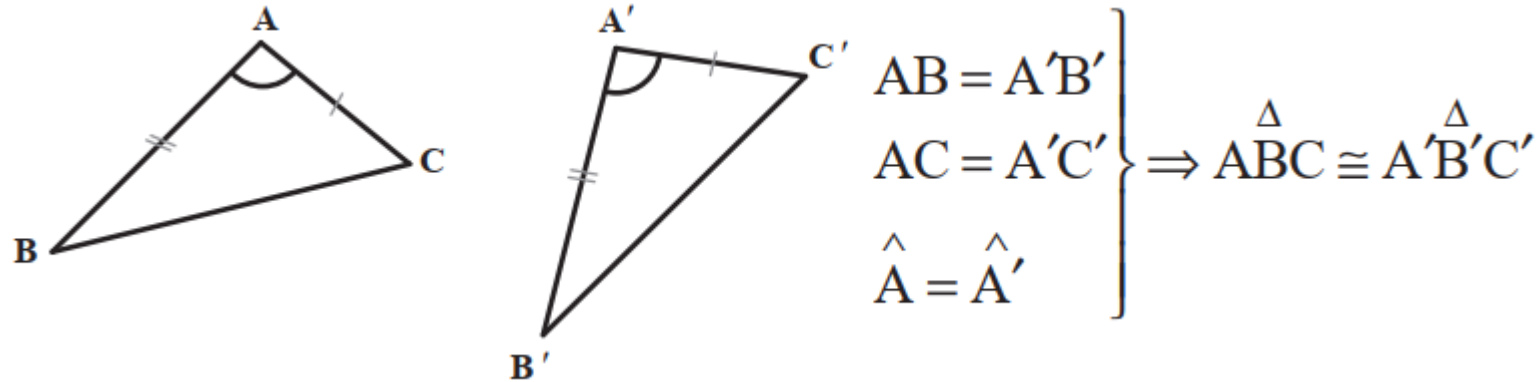


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فصل ۳ - درس ۳ پایه نهم

یادآوری

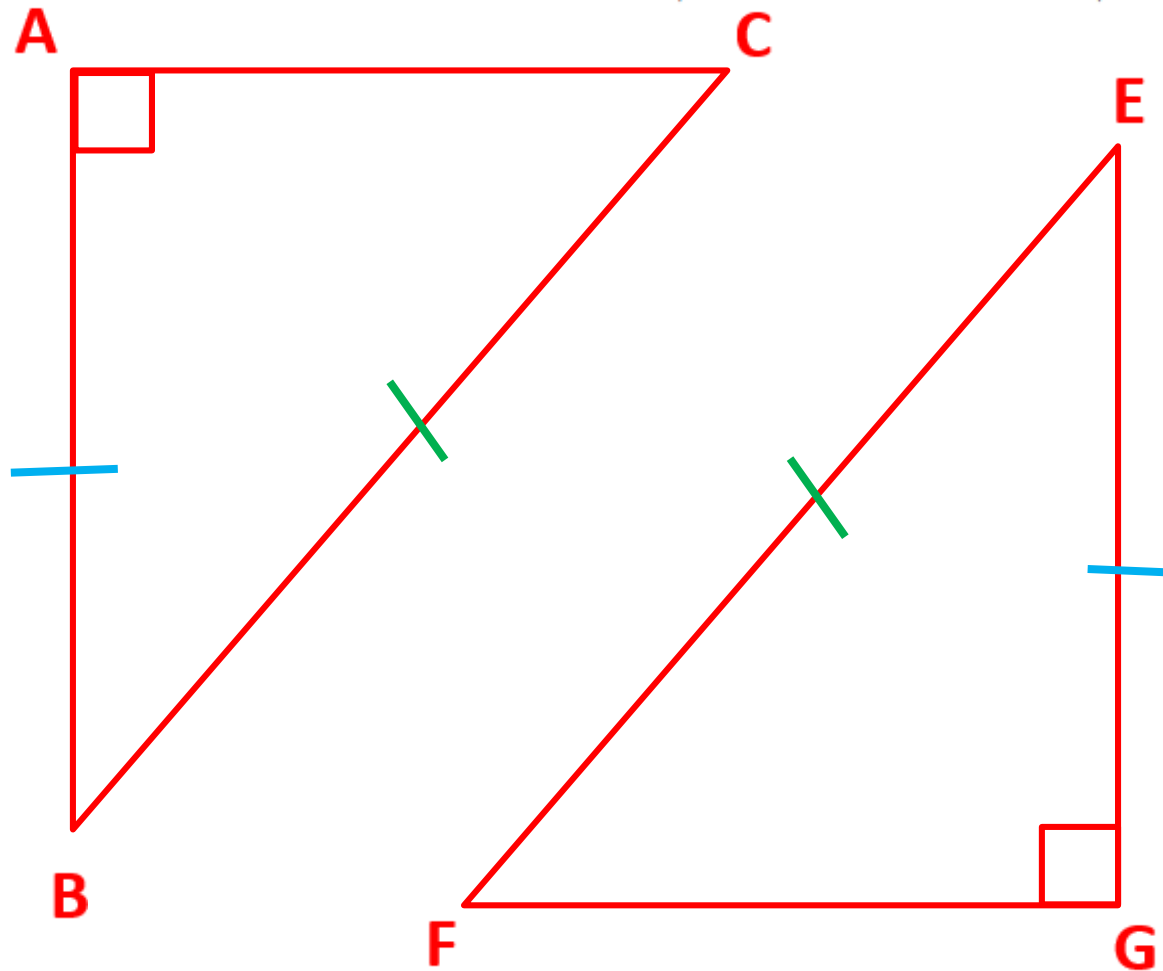
با مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم؛ مثلاً حالت هم‌نهشتی (ض ز ض) را این‌گونه نمایش می‌دهیم:



برای یادآوری، دو حالت دیگر هم نهستی مثلث‌ها و دو حالت هم نهستی ویژه مثلث‌های قائم‌الزاویه

را به همین صورت بیان کنید.

(وض)

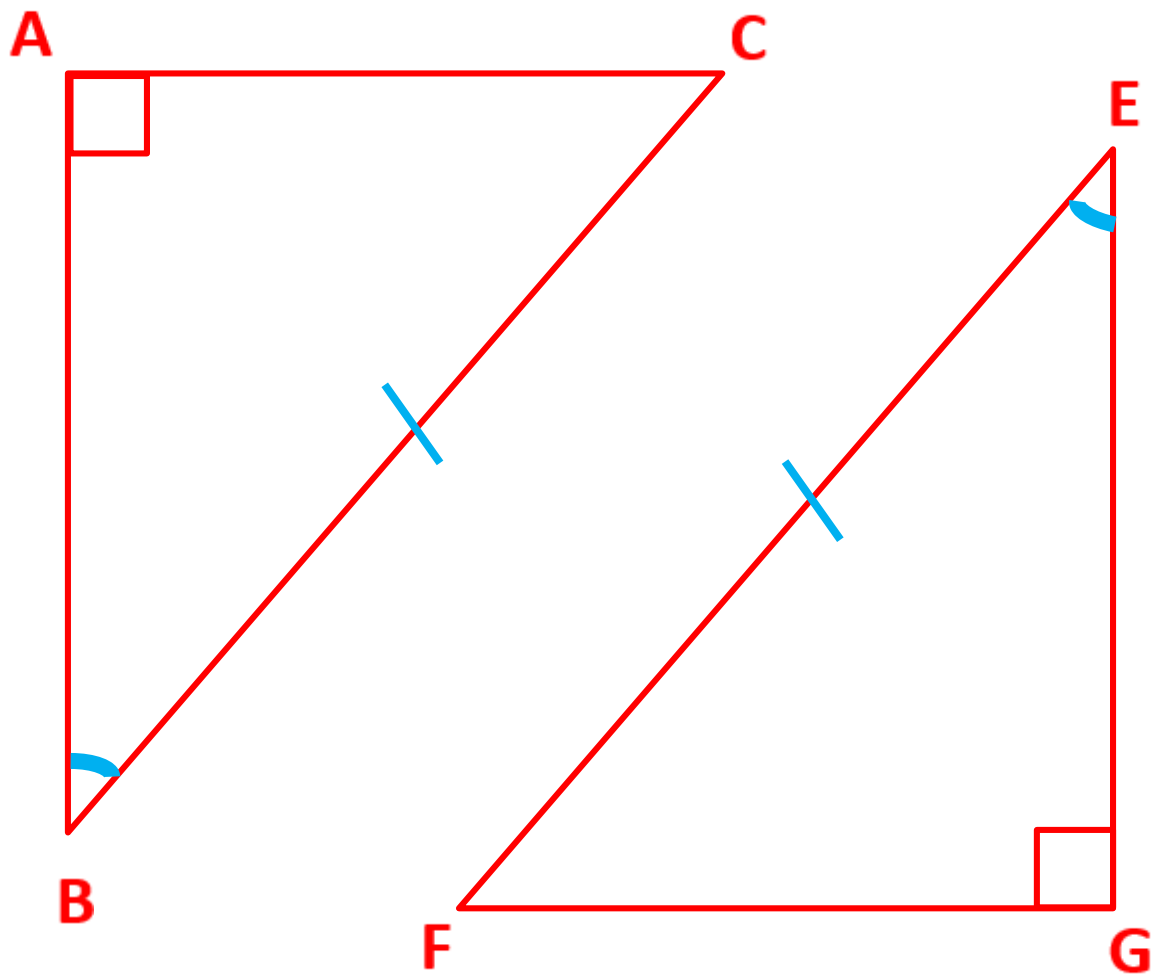


$$\overline{EF} = \overline{CB}$$

$$\overline{AB} = \overline{EG}$$

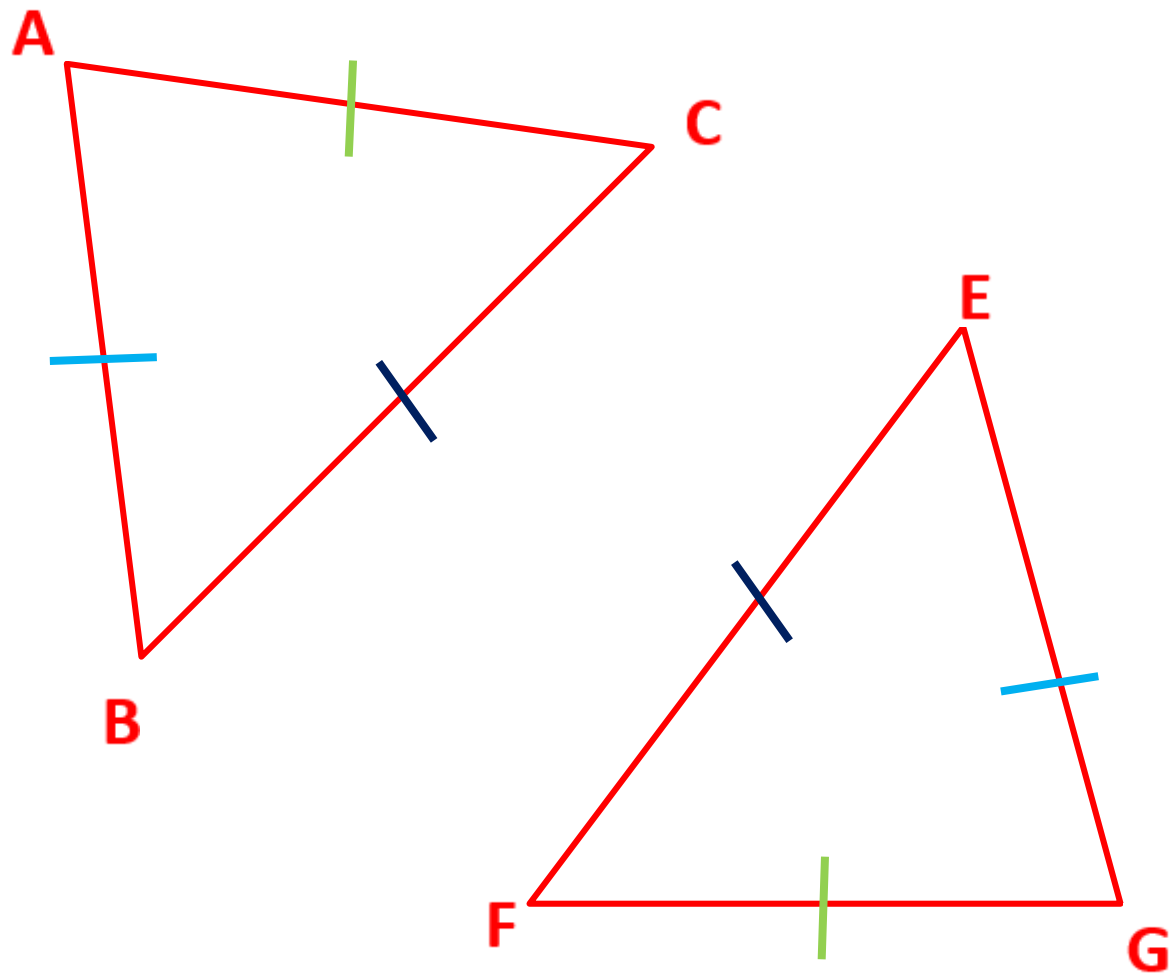
(وض)

$$\triangle ABC \cong \triangle EFG$$



(وز)

$$\left. \begin{array}{l} \overline{EF} = \overline{CB} \\ \hat{E} = \hat{B} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وز)} \\ \rightarrow \end{array} \triangle ABC \cong \triangle EFG$$



(ض ض ض)

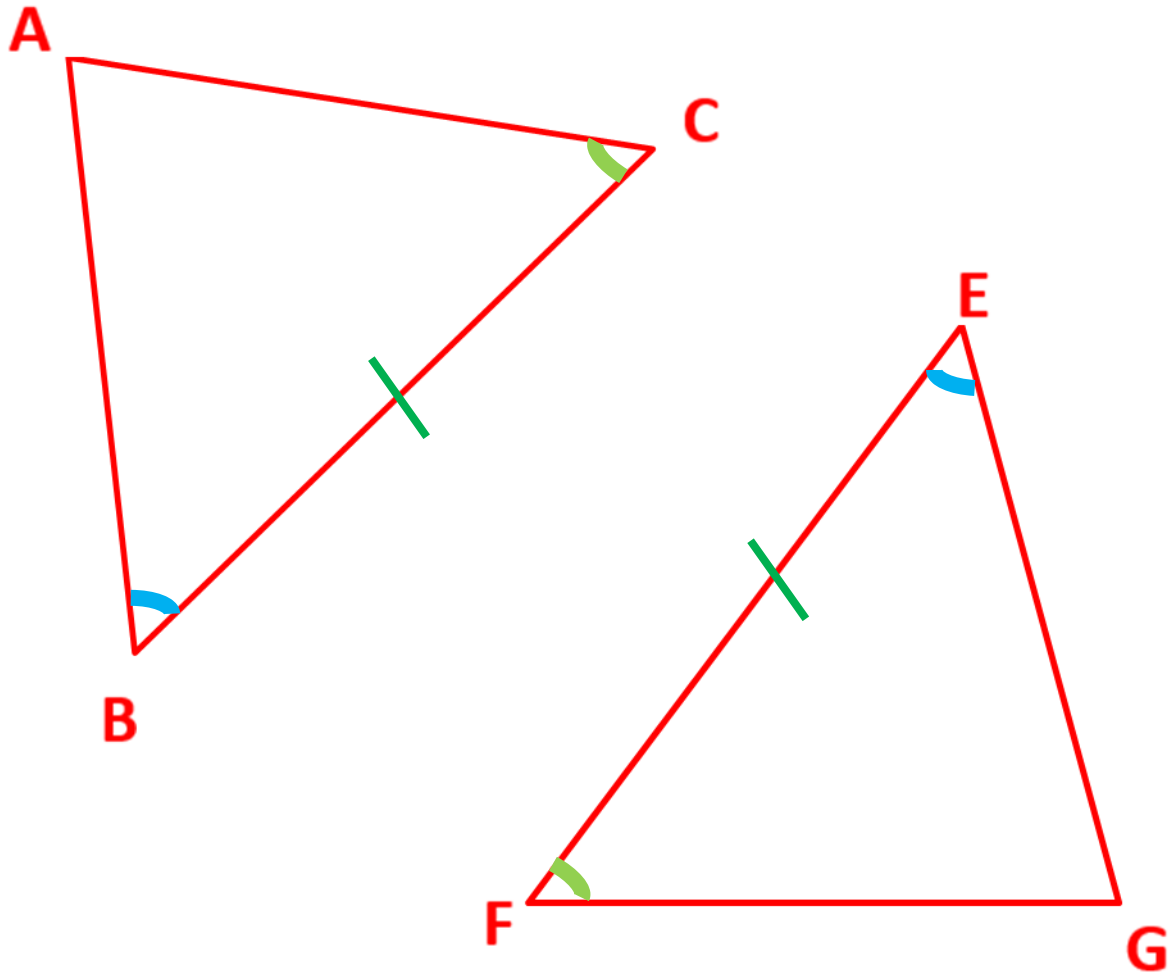
$$\overline{EF} = \overline{CB}$$

$$\overline{AB} = \overline{EG}$$

$$\overline{FG} = \overline{AC}$$

(ض ض ض)

$$\triangle ABC \cong \triangle EFG$$

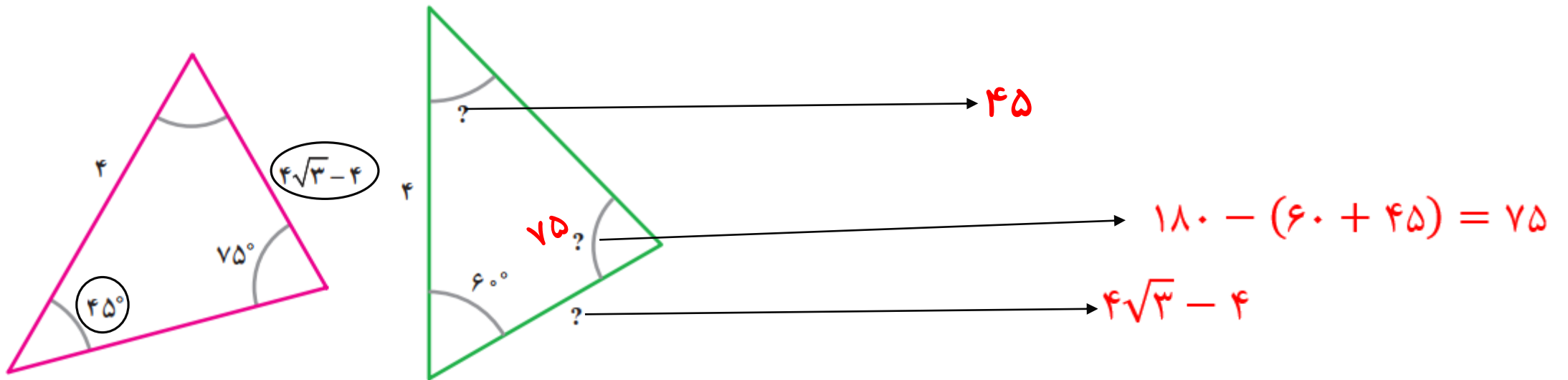


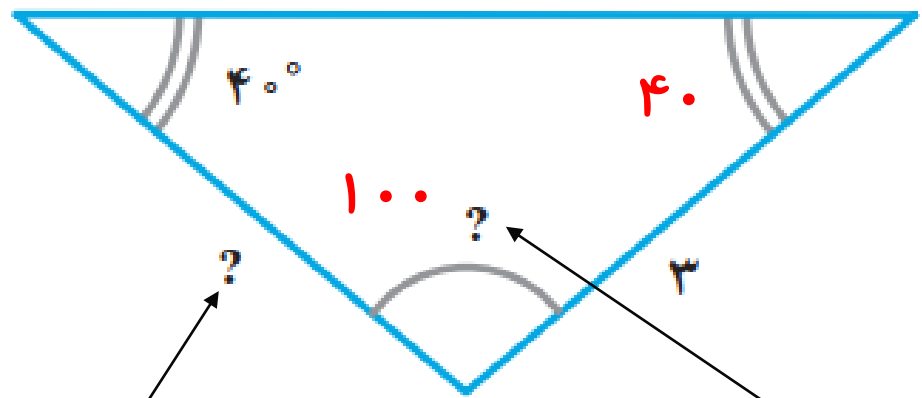
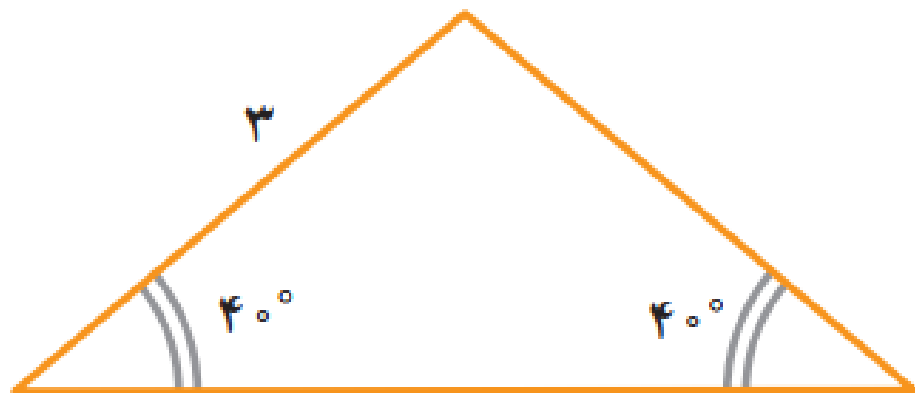
(ز ض ز)

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E} = \hat{B} \\ \hat{F} = \hat{C} \\ \overline{EF} = \overline{CB} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ز ض ز)} \\ \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle EFG \end{array}$$

فعالیت

۱- در شکل‌های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید:

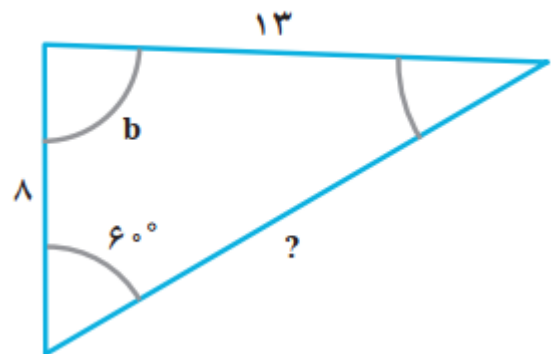
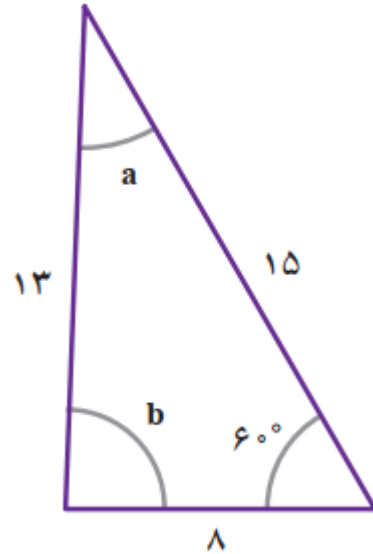
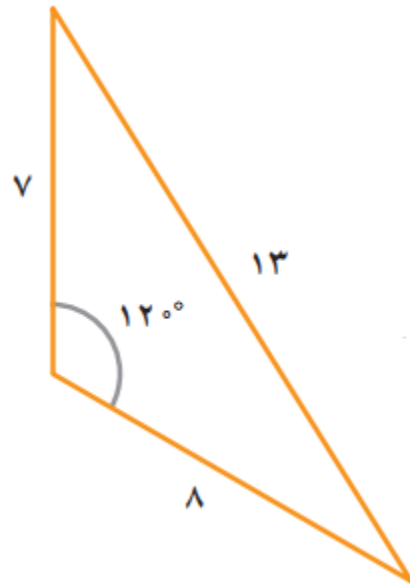
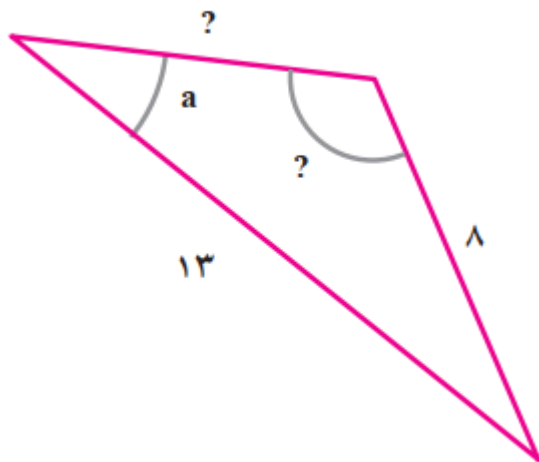
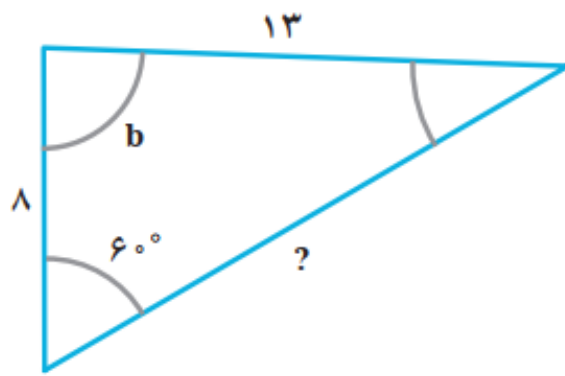
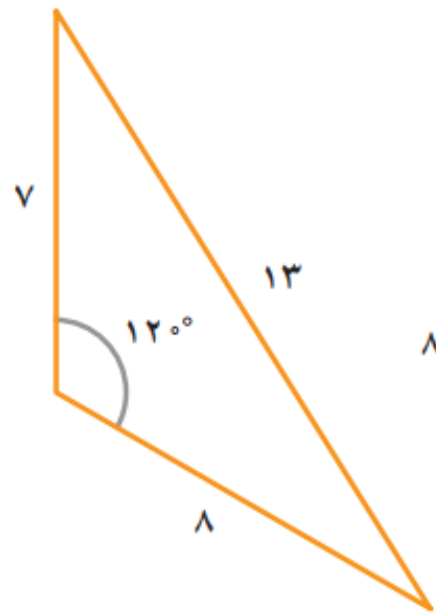
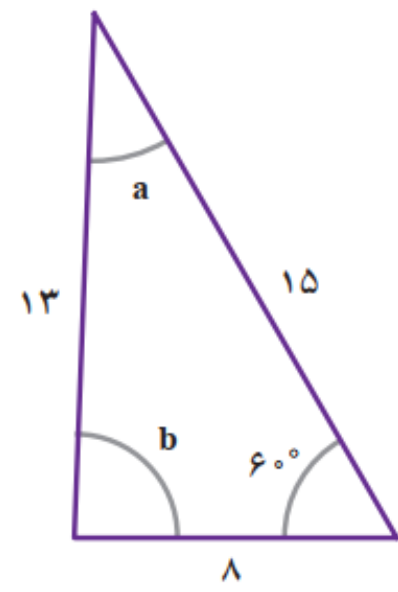
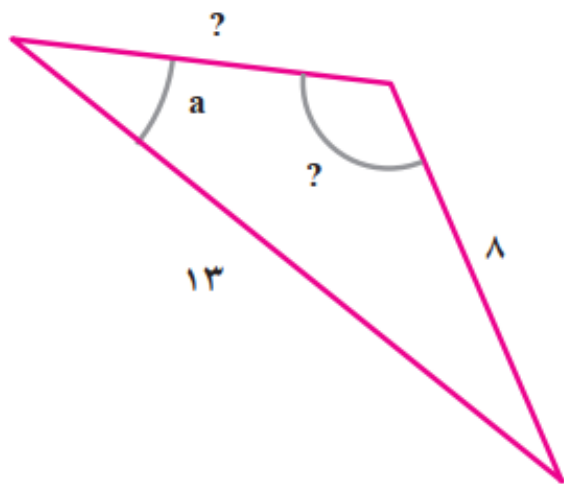


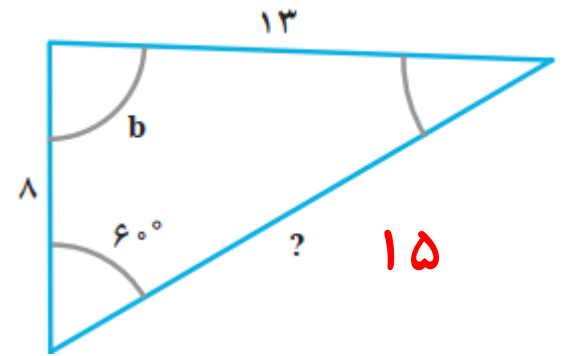
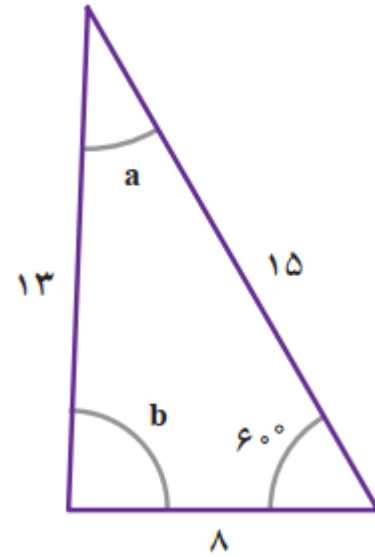
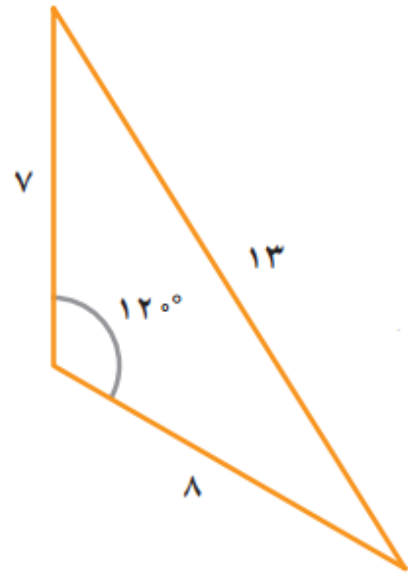
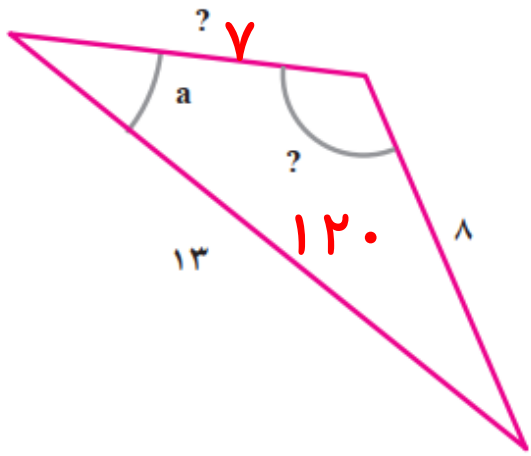


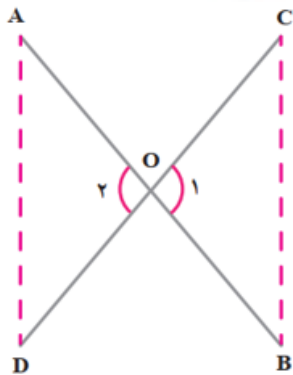
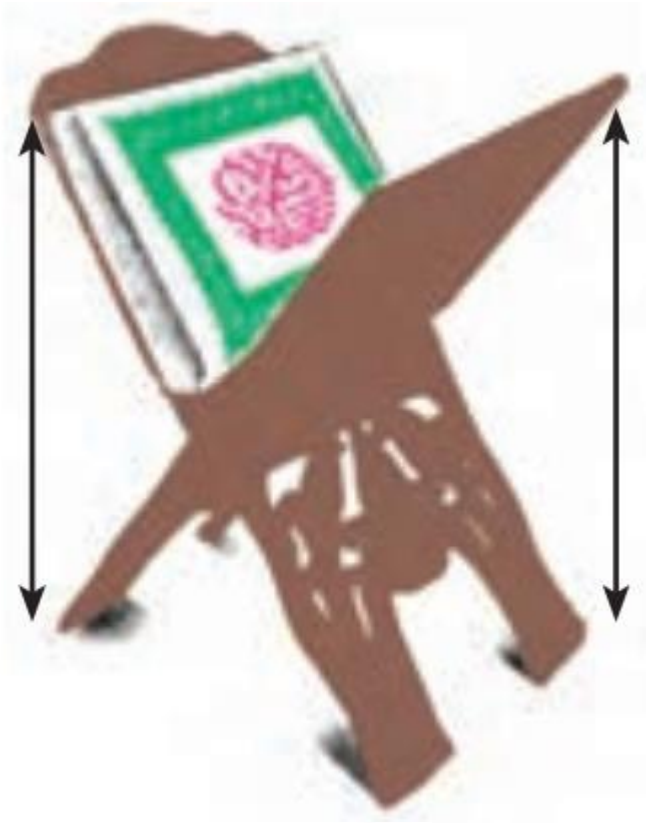
r → ?

$$180 - (40 + 40) = 100$$

۲- در شکل زیر چهارمثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های هم‌نهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «(?)» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).

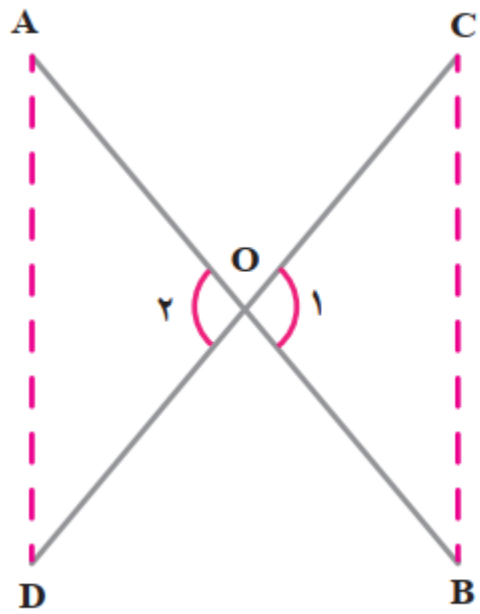






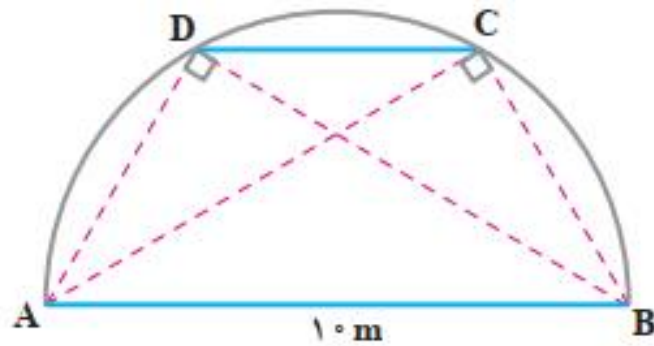
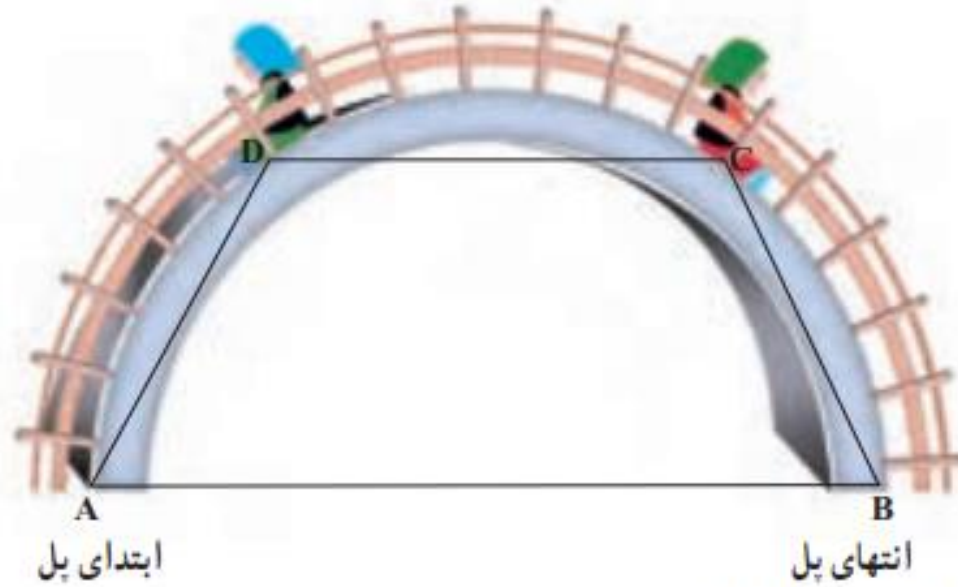
مثال : با رحل های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. در نمونه‌ای از آنها دو لایه چوبی آن از وسط یکدیگر گذشته است. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه‌گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است : $OA=OB$ و $OC=OD$ (چرا؟) و حکم این است : $AD=BC$. زوایای \hat{O}_1 و \hat{O}_2 برابرند (چرا؟)، پس مثلث‌های OBC و OAD هم‌نهشت هستند و از آنجا درستی حکم به دست می‌آید؛ یعنی :

چون متقابل به راس هستند .
چون دو لایه چوبی از وسط هم گذشته اند



$$\left. \begin{array}{l}
 OA = OB \\
 OC = OD \\
 \hat{O}_1 = \hat{O}_2
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{(ض ز ض)} \\
 \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow \underline{AD = BC} \\
 \text{حکم}
 \end{array}$$

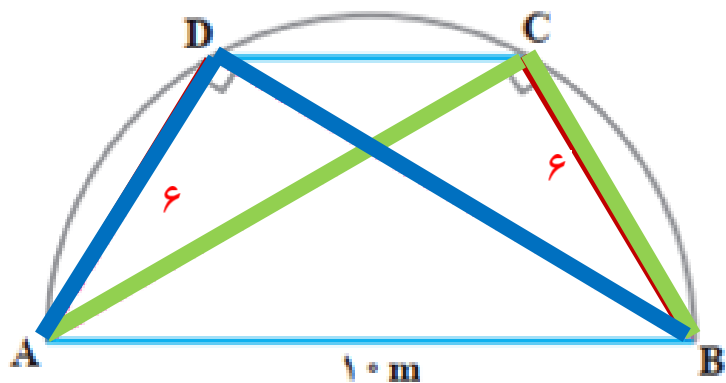
فعالیت



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، بوستانی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم دایره وجود دارد بچه‌ها برای بازی از پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصله ابتدای پل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) ۱۰ متر است. ترانه روی پله C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد ($BC=6$) و شهرزاد روی پله D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل برابر باشد؛ یعنی $AC=BD$. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.

۱- نشان دهید زاویه‌های \hat{C} و \hat{D} در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک

قضیه فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC=BD$



در مثلث قائم الزاویه ABC: $AC^2 = AB^2 - BC^2$

$$AC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$AC = \sqrt{64} = 8$$

با توجه به اینکه دو زاویه محاطی C و D هر دو روبروی قطر AB هستند هر دو با هم برابر و هر کدام ۹۰ درجه هستند.

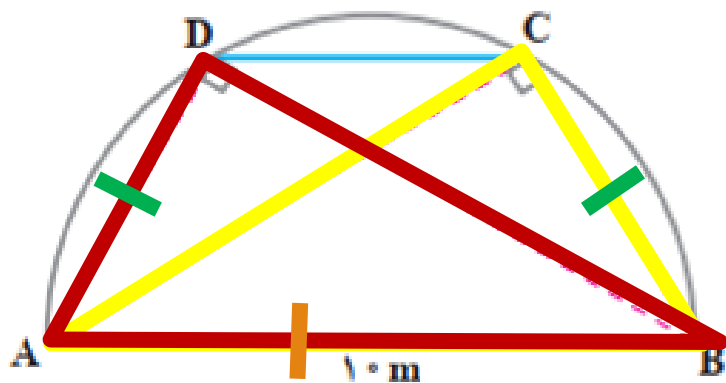
در مثلث قائم الزاویه ABD: $BD^2 = AB^2 - AD^2$

$$BD^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$BD = \sqrt{64} = 8$$

$$BD = AC$$

۲- به کمک هم‌نهشتی مثلث‌های ADB و ACB ، نشان دهید $AC=BD$.



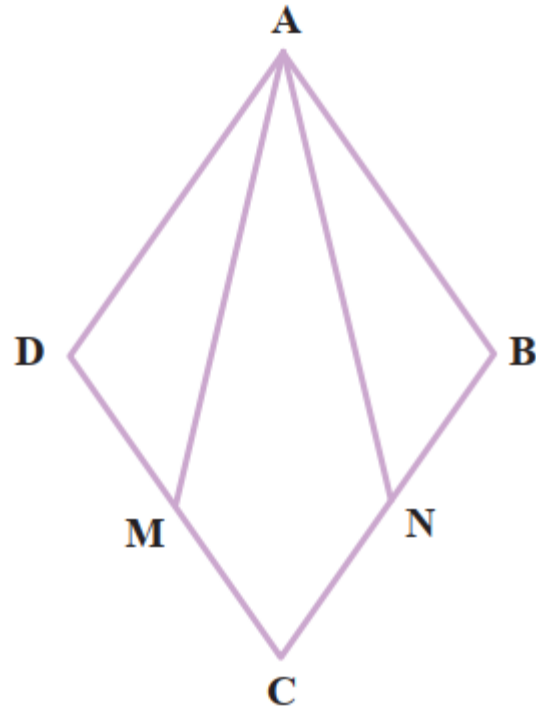
$AB = AB$ ضلع مشترک (وتر)

$AD = BC = ۶$

$\hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ$

$\left. \begin{array}{l} \text{وض} \\ \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} BD = AC$

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های

اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

۱- با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$\text{فرض} \begin{cases} AD = AB = DC = BC, & BN = \frac{1}{2} \overline{BC} \\ \hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \hat{D} & , DM = \frac{1}{2} \overline{DC} \end{cases}$$

حکم: $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

۲- با توجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی های قسمت اول، ثابت کنید مثلث های ADM و ABN

هم نهشت اند.

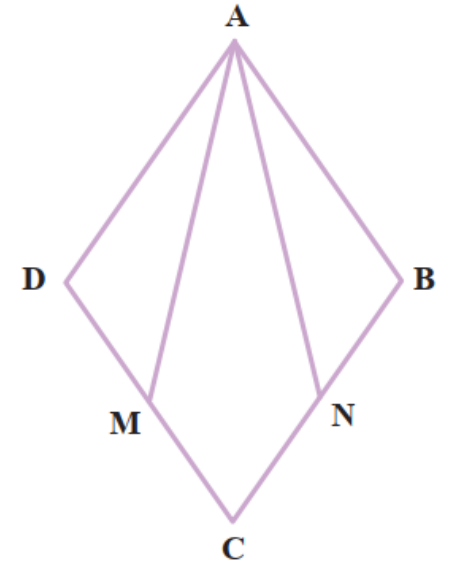
$$\overline{AB} = \overline{AD}$$

$$\overline{BN} = \overline{DM}$$

$$\hat{B} = \hat{D}$$

(ض ض ض)

$$\triangle ABN = \triangle ADM$$



۳- حال با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABN و ADM، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$$\overline{AB} = \overline{AD}$$

$$\overline{BN} = \overline{DM}$$

$$\hat{B} = \hat{D}$$

(ض ض ض)

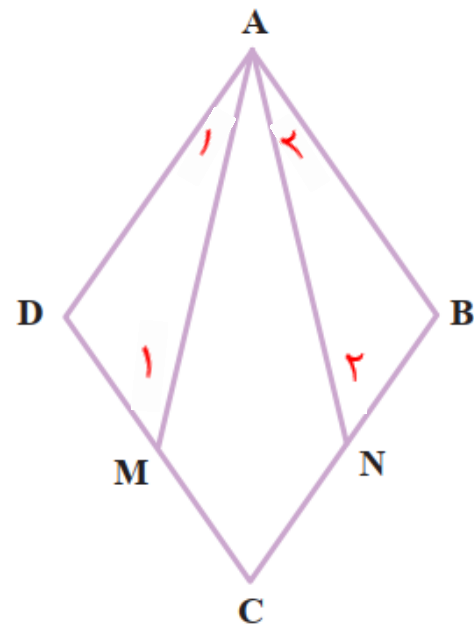
$$\triangle ABN = \triangle ADM$$

اجزای
متناظر

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$\overline{AM} = \overline{AN}$$

$$\hat{M}_1 = \hat{N}_2$$



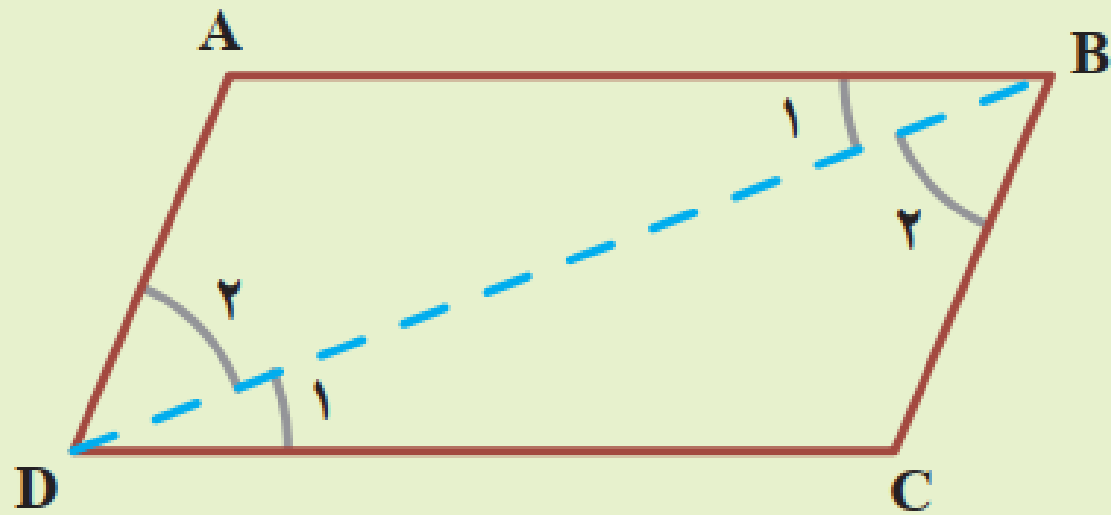


می خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی الاضلاع،
مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابرند.
مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را
بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ نظر دو دانش‌آموز را دربارهٔ
این مسئله ببینید و به سؤال‌های مطرح شده پاسخ دهید.

شبهنم : می دانیم که در تعریف متوازی الاضلاع،
برابری ضلع های روبه رو آورده شده است. علاوه
بر آن با اندازه گیری هم می توانیم این موضوع را
نشان دهیم.

شهرزاد : معلوم است که ضلع های
روبه رو با هم مساوی است؛ با چشم
هم می توان دید!

- آیا می توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ **خیر، اندازه گیری با خط همراه است.**
- به تعریف متوازی الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در
این تعریف وجود داشت؟ **خیر.** آیا اگر با اندازه گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را
ثابت کرده ایم؟ چرا؟ **خیر، اندازه گیری با خط همراه است.**



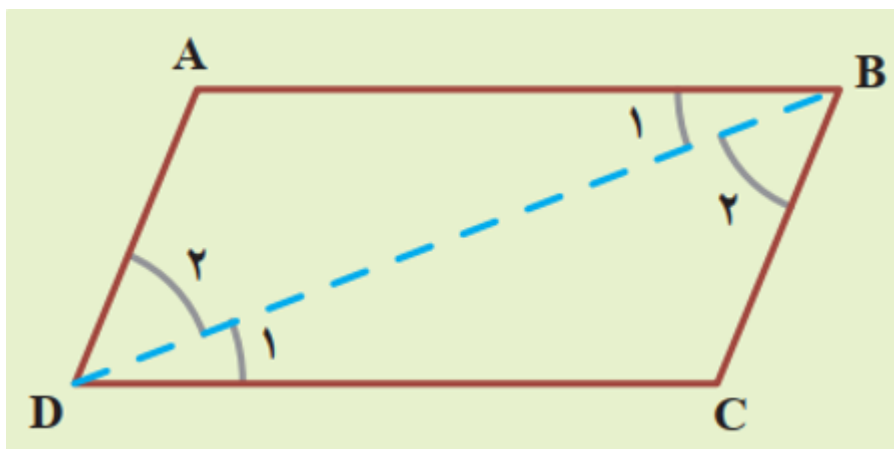
ترانه : به نظر من باید دو مثلث هم نهشت

بیابیم و با اثبات هم نهستی آنها به برابری اضلاع

مقابل در متوازی الاضلاع برسیم؛ اما در شکل

دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط،

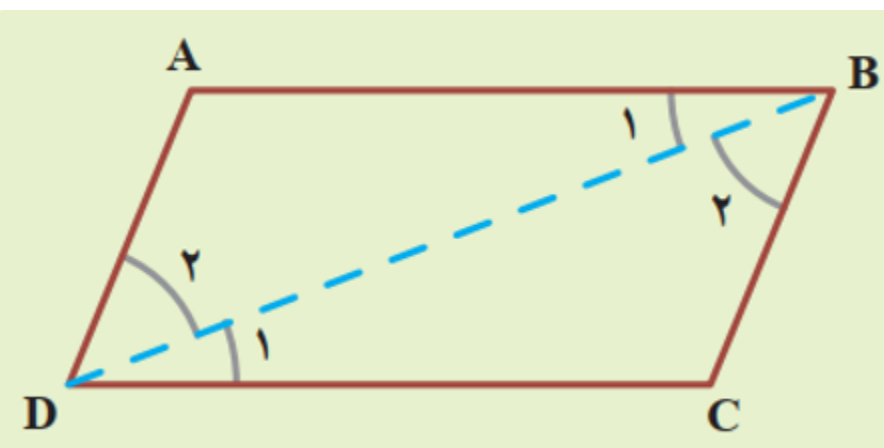
یعنی یکی از قطرها، دو مثلث ایجاد می کنیم.



اثبات را به صورت زیر کامل کنید :

$$\left. \begin{array}{l}
 AB \parallel CD, \text{ مورب } \overline{DB} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\
 \overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{ و } BD \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\
 BD = \overline{BD} \text{ (ضلع مشترک)}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{رض ز} \\
 \Rightarrow \triangle ADB \cong \triangle BDC \text{ (رض ز)}
 \end{array}$$

با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی‌های زیر را کامل کنید.



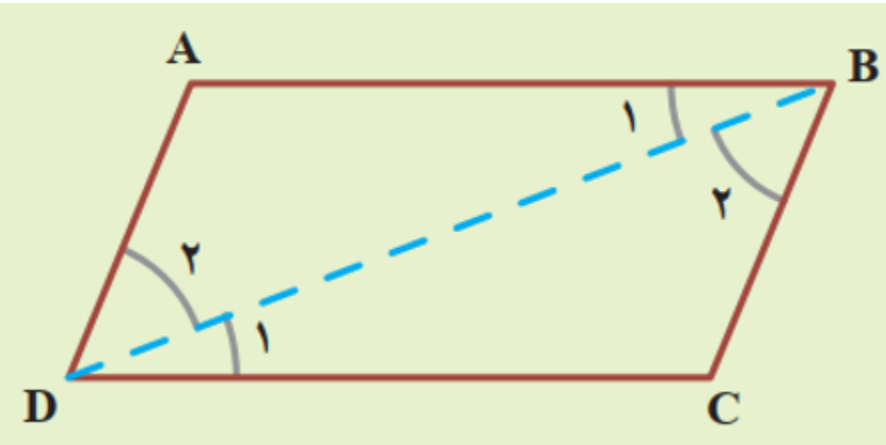
دیدیم که $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ است؛ بنابراین داریم: $AD = \overline{BC}$

و $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$ است؛ بنابراین داریم: $AB = \overline{DC}$

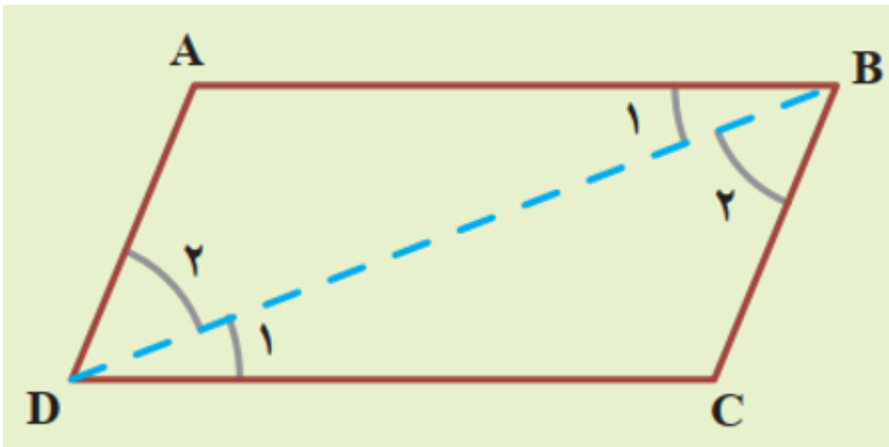
$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } \overline{DB} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{ و } BD \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ BD = \overline{BD} \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADB \cong \triangle BDC \text{ (ز ض ز)}$$

● چرا برای اثبات هم‌نهستی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ز ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟ **زیرا برابری ضلع‌ها در فرض مسئله نیست.**

● با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به دست آوریم؟ **بله.**



- از هم‌نهستی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع، به جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه دیگری هم دربارهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.



$$\triangle ADB \cong \triangle BDC \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{A} = \hat{C}$$

ساد باشد

- در هر متوازی‌الاضلاع — زاویه‌های روبه‌رو، مساوی‌اند.