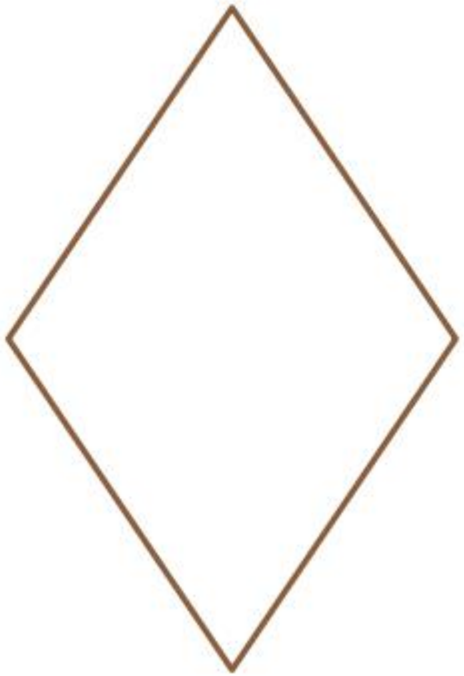
فصل ۳– درس ۲ پایه :نهم

در درس گذشته آموختید که دیدن و استفاده از حواس یا ارائهٔ مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعاتِ مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواستهٔ مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱ــ به گفت‌وگوی زیر توجه کنید :

مهرداد : آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟

سعید : بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

فرض : شکل لوزی است.

حکم : زاویه های روبه رو برابر است.

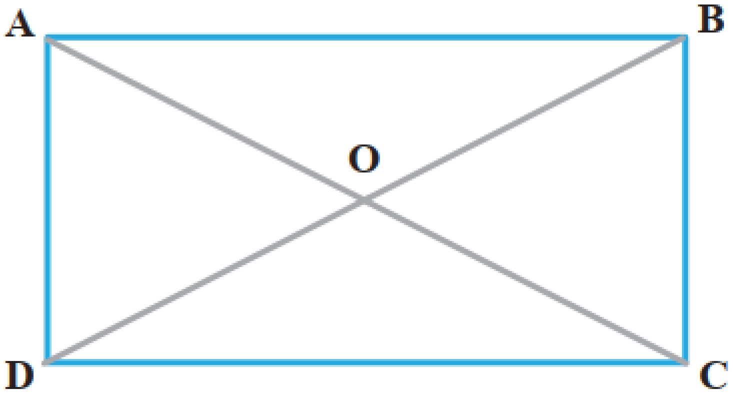
استدلال :

لوزی نوعی متوازی الاضلاع است.

در متوازی‌الاضلاع زاویه های روبه رو برابر است.

$\Rightarrow$ در لوزی زاویه‌های روبه‌رو برابر است.

۲ــ اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئلهٔ زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید :



فرض : ABCD مستطیل است.

حکم : قطرهای مستطیل، مساوی است.

فرض :

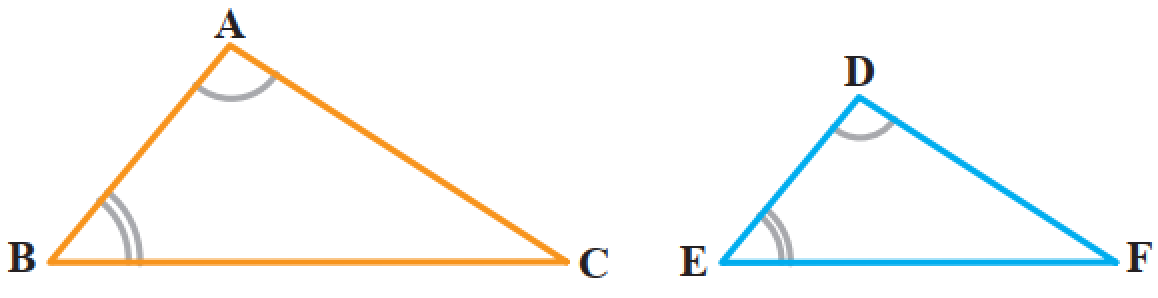
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = ۹۰ \\ AB = DC \quad , \quad AD = BC \\ AB \parallel DC \quad , \quad AD \parallel BC \end{cases}$$

حکم : $AC = BD$

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

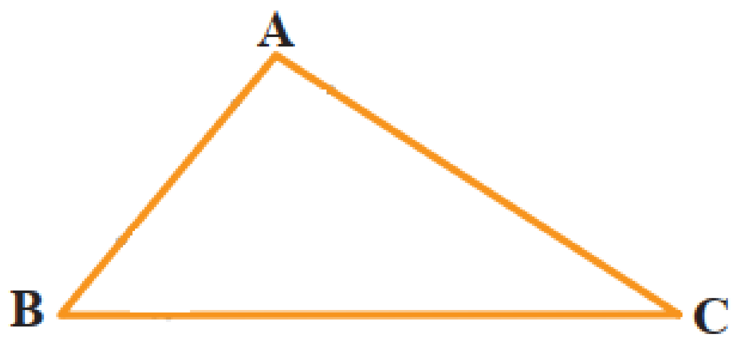
۱ــ در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



فرض : $\hat{B} = \hat{E}$ ، $\hat{D} = \hat{A}$

حکم : $\hat{F} = \hat{C}$

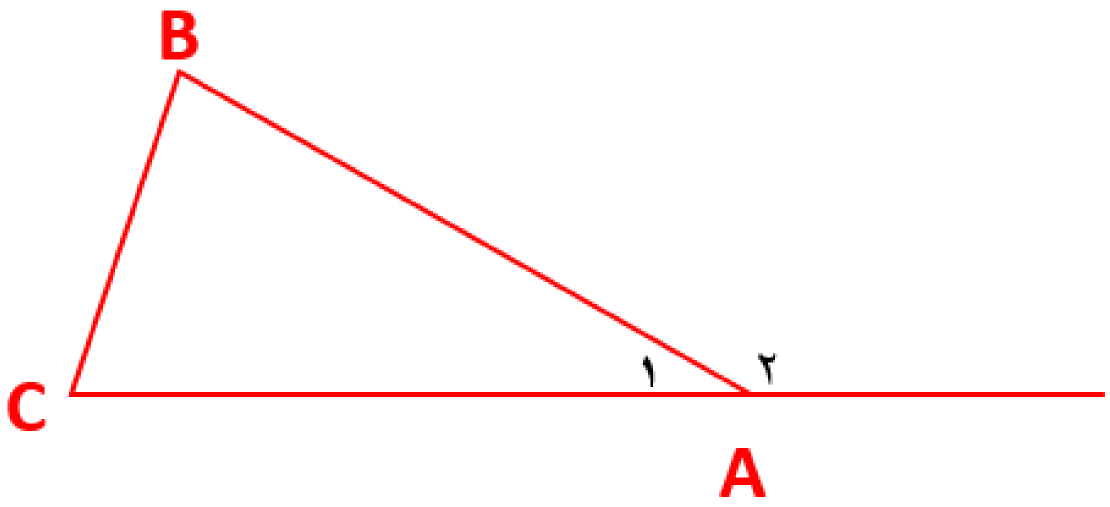
۲ــ اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.



فرض : $\hat{A} > \hat{B}$

حکم : $\overline{BC} > \overline{AC}$

۳ــ نشان دهید در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن برابر است.



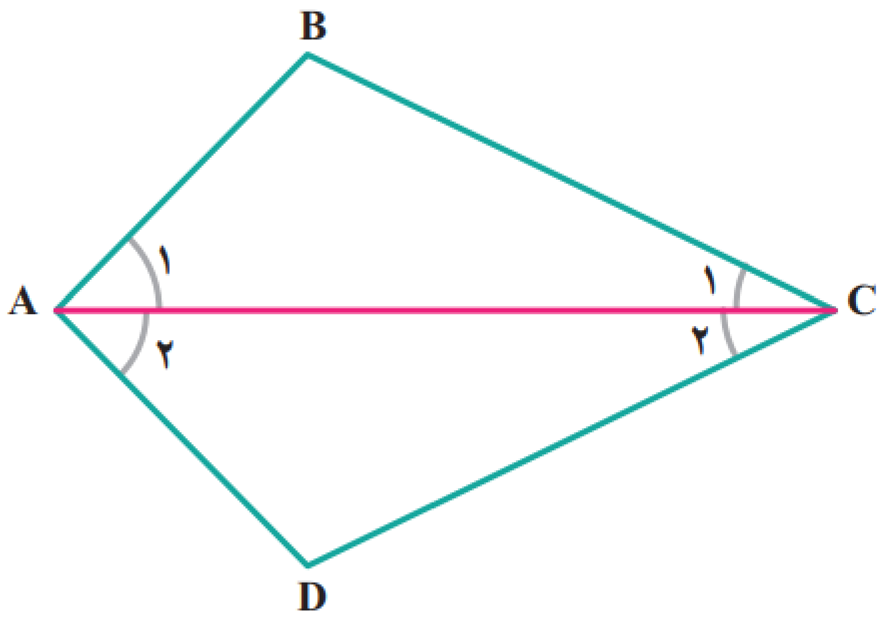
فرض : زاویه $A_۲$ خارجی است .

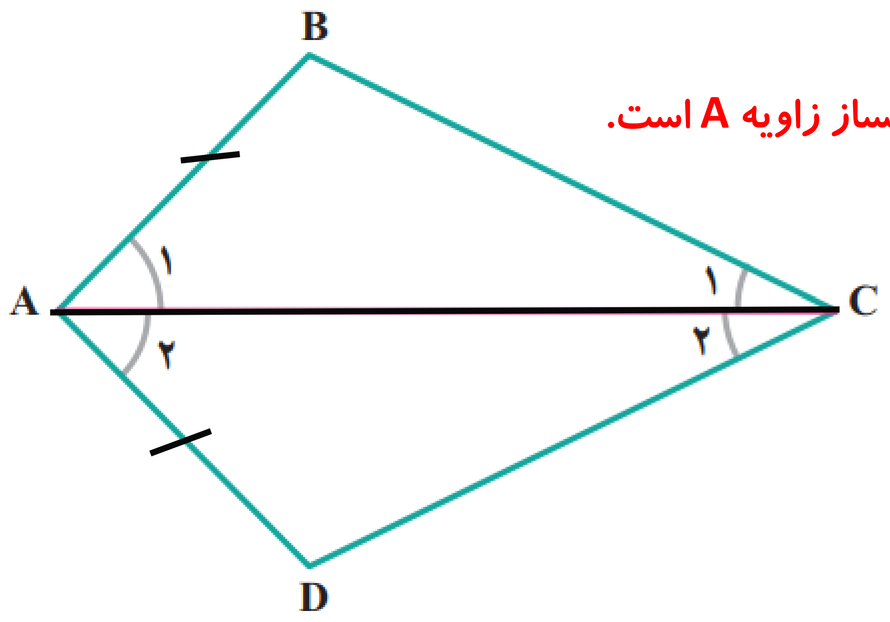
حکم : $\widehat{A_۲} = \hat{B} + \hat{C}$

فعالیت

۱ــ در مسئلهٔ زیر، فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید، سپس استدلال درستی برای آن بنویسید.

مسئله : در شکل مقابل پارخط AC نیمساز زاویهٔ A است و اضلاع AB و AD برابرند. ثابت کنید مثلث‌های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ هم‌نهشت‌اند.



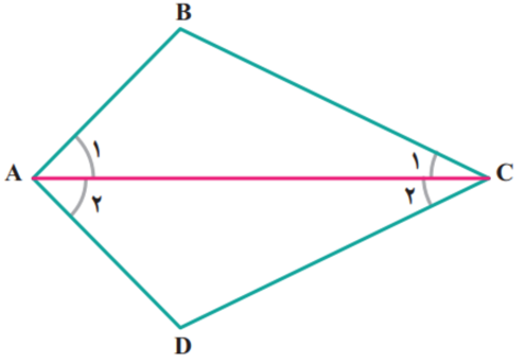


Ac نیمساز زاویه A است.

فرض: $\overline{AB} = \overline{AD}$

$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$

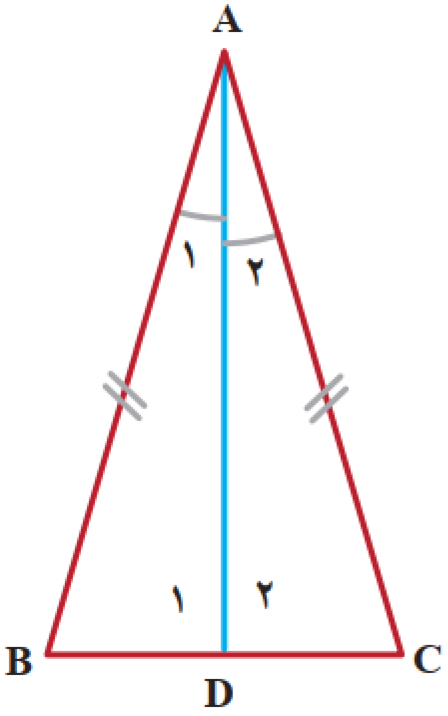
حکم: $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC}$



استدلال : چون AC نیمساز است، داریم $A_۱ = A_۲$ و $C_۱ = C_۲$ و از طرفی AC نیز ضلع مشترک در هر دو مثلث است، لذا دو مثلث ABC و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (زضز) هم‌نهشت‌اند.

استدلال درست : چون AC نیمساز زاویه A است داریم $A_1 = A_2$ و با توجه به متن سوال $AB = AD$ و از طرفی AC نیز ضلع مشترک هر دو مثلث است، لذا دو مثلث ABC و ADC به حالت دو ضلع و زاویه بین هم نهشت اند

۲ـ مثلث زیر متساوی‌الساقین و AD نیمساز وارد بر قاعدهٔ آن است. با استدلال زیر نشان داده‌ایم که نیمساز وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد.



(ض ز ض)

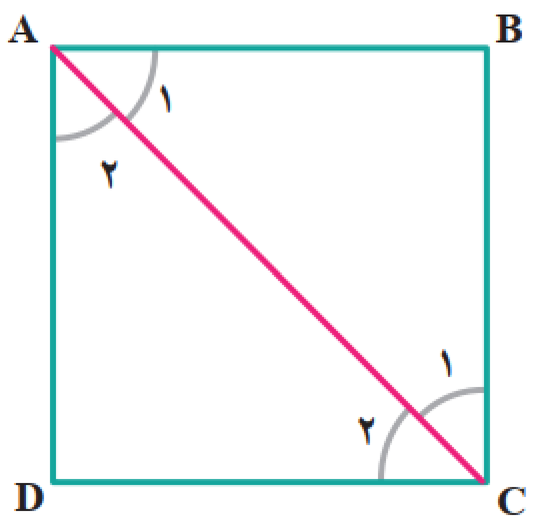
$$\begin{cases} AB = AC & \text{(ساق‌های برابر)} \\ A_1 = A_2 & \text{(نیمساز است AD)} \\ AD = AD & \text{(ضلع مشترک)} \end{cases} \Rightarrow ABD \cong ACD \Rightarrow BD = CD$$

لذا نقطهٔ D وسط BC است و AD میانه است.

آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویهٔ B نیز میانهٔ ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد؟ خیر

با رسم نیمساز زاویه دیگر همان شرایط برای اثبات میانه بودن درست نیست .

۳ــ با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع هم‌نهشت‌اند و زوایای متناظر با هم برابرند؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است.

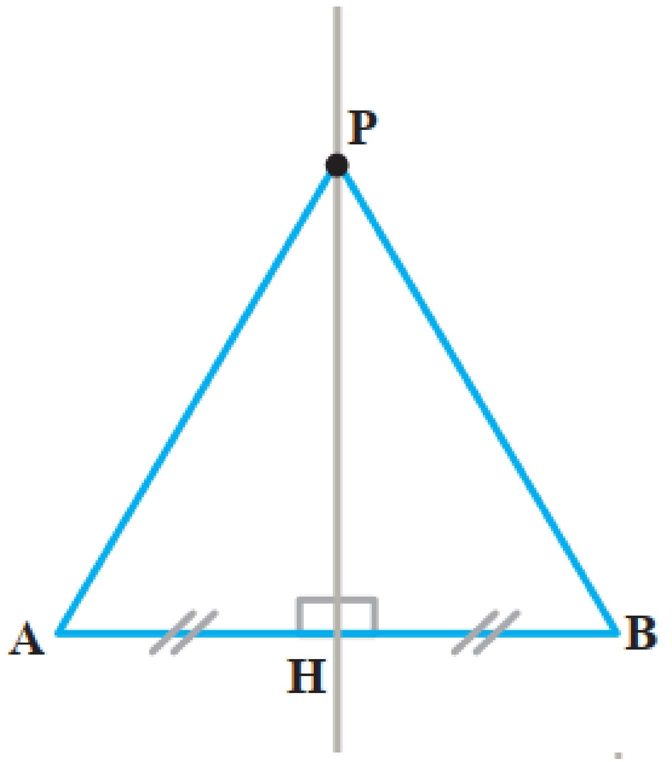


آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟ بله

با رسم قطر دیگر همان شرایط برقرار است و قطر دیگر نیز نیمساز زاویه ها می شود .

۴ـ به‌نظر شما چرا در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود؛ اما در فعالیت ۳ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به‌کار برده‌ایم، در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می‌توان درستی نتیجه را به همهٔ عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.



۵ــ نقطه‌ای مانند P، روی عمودمنصف پاره‌خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند، نتیجه می‌گیریم پاره‌خط‌های PA و PB با هم برابر است.

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ P، که روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، از دو سر پاره‌خط AB یکسان‌اند.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجهٔ بالا برای «هر» نقطهٔ روی عمودمنصف برقرار است، کافی است؟ بله، اگر هر نقطه ی دیگری روی عمود منصف در نظر بگیریم همین ویژگی ها را خواهد داشت .

کار در کلاس

به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر آورده‌اند :

مسئله : مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است. دربارهٔ معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید.

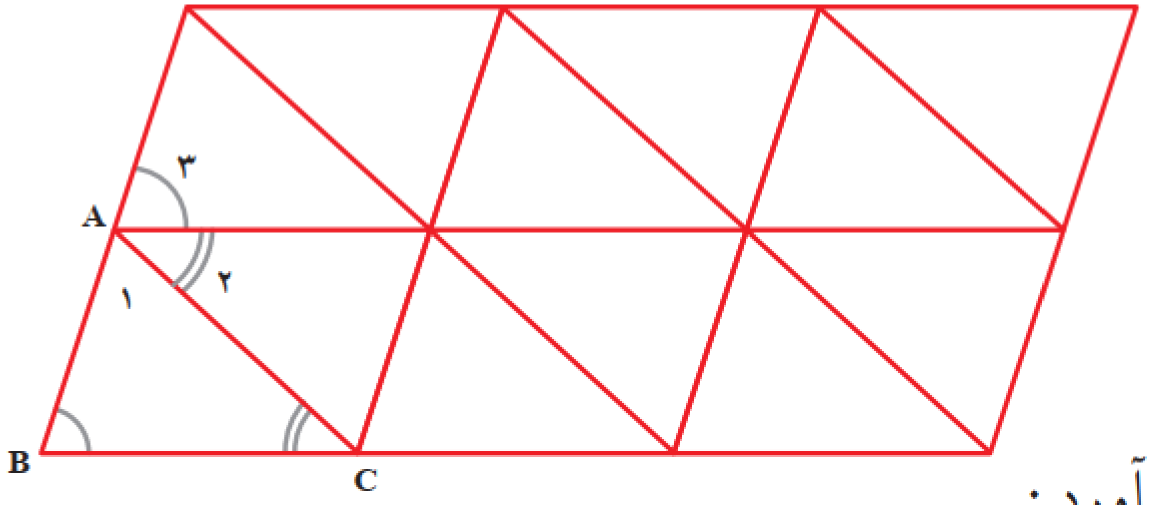
استدلال حامد : حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درنظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه 60° است، مجموع زاویه‌های مثلث 180° است.

با استدلال حامد نمیتوان ثابت کرد؛ زیرا یک مثلث خاص را در نظر گرفته است.

استدلال حسین : حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همهٔ آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

با استدلال حسین نمیتوان نتیجه گرفت ؛ زیرا حسین درستی چند مثلث را نشان داد،

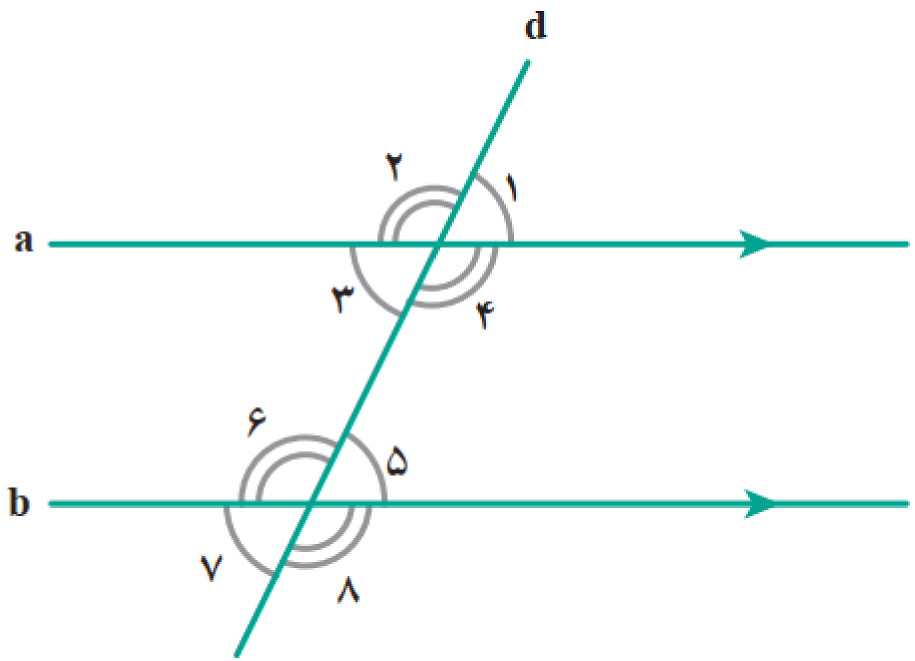
و در اندازه گیری احتمال خطا وجود دارد. و با ذکر چند مثال نمی توان درستی موضوعی را اثبات کرد



استدلال مهدی : مهدی شکل روبرو را، که از مثلث‌های هم‌نهشت تشکیل شده است کشید و با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC مانند شکل استدلالی با استفاده از شکل به‌صورت زیر آورد :

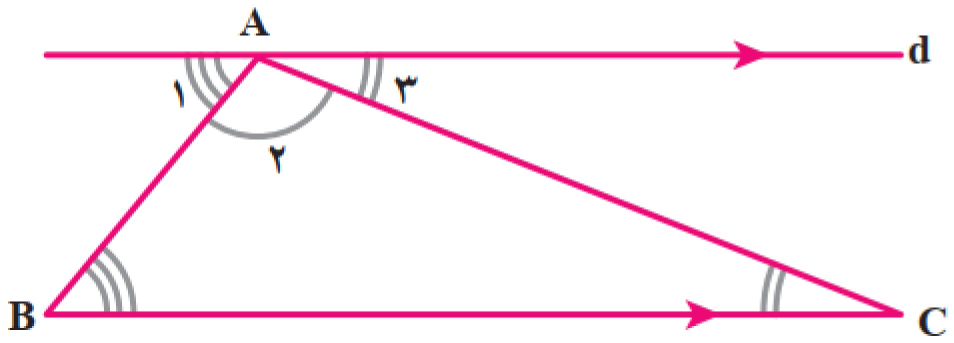
$$\hat{A}_{۱}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۳}+\hat{A}_{۲}=۱۸۰^{\circ}$$

چون استدلال شهودی است قابل استناد نیست .



استدلال رضا : رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی‌اند».

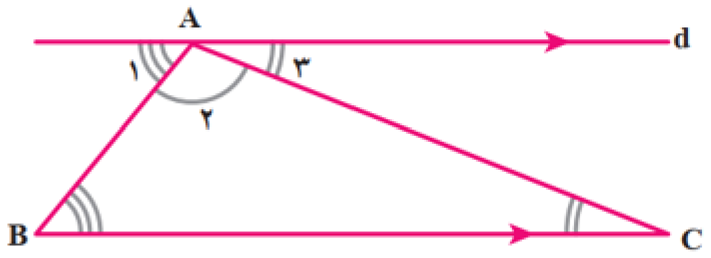
حال مثلثی دلخواه مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ را درنظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویهٔ تشکیل شده در رأس A را با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که



زاویهٔ $A_۲$ همان زاویهٔ A در مثلث است و با درنظر گرفتن AB به‌عنوان مورّب داریم : $\hat{B}=\hat{A}_۱$ و با درنظرگرفتن AC به‌عنوان مورب داریم : $\hat{C}=\hat{A}_۳$ پس با جای‌گذاری $\hat{A}_۱$ و $\hat{A}_۳$ به‌ترتیب به جای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ خواهیم داشت : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۳=۱۸۰^\circ$

استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی مرتّب و خلاصه کرد و بدین‌صورت نوشت :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} d \parallel BC \\ \text{و} \\ AB\ \text{مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_۱ \\ \\ \left.\begin{array}{r} d \parallel BC \\ \text{و} \\ AC\ \text{مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۳ = ۱۸۰^\circ$$



فعالیت

مسئله : حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به‌نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

پول هردو با هم برابرند.

۵۰۰۰ = پول حمید + پول بهرام

۵۰۰۰ = پول سعید + پول بهرام

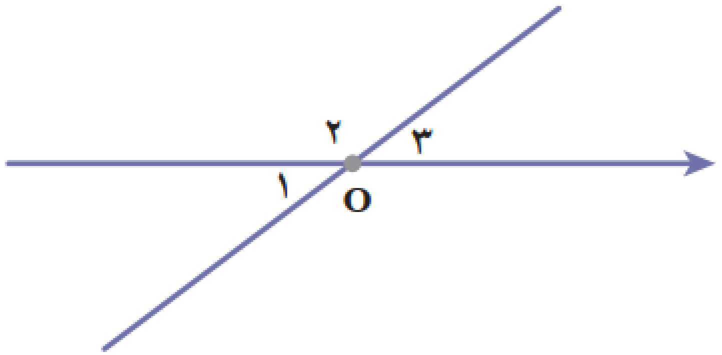
پول حمید = پول سعید ⟵ پول حمید + پول بهرام = پول سعید + پول بهرام

بین استدلالی که برای مسئلهٔ قبل و مسئلهٔ بعدی هست، چه شباهتی می‌بینید؟

هر دو از طریق یک استدلال ثابَت شده اند.

مسئله : نشان دهید زاویه‌های متقابل به رآس با هم برابرند.

فرض کنیم $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۳$ مانند شکل زیر متقابل به رأس باشند، داریم :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ\\ \hat{O}_۳+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_۱+\hat{O}_۲=\hat{O}_۳+\hat{O}_۲\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۳$$

شاد باشید