



دایره



زاویه‌های محاطی و مرکزی و ارتباط آنها با کمان‌ها در دایره، کاربرد بسیاری در طراحی نقش فرش‌ها و دیگر صنایع دستی و معماری دارد.

در تصویر بالا نمای داخلی سقف آرامگاه حکیم خیام نیشابوری را مشاهده می‌کنید. خیام، فیلسوف، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و رباعی‌سرای ایرانی قرن پنجم هجری شمسی است. یکی از برجسته‌ترین کارهای وی اصلاح گاهشماری ایران در زمان وزارت خواجه نظام الملک در دوره سلجوقی است.



۱- پنج نقطه پیدا کنید که فاصله هر کدام از نقطه ۰،۲ سانتی متر باشد.

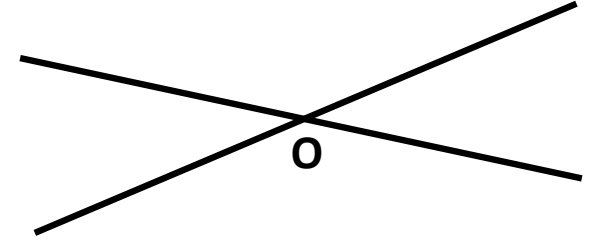
اگر این نقطه‌ها را بیشتر و بیشتر کنیم، چه شکلی ایجاد می‌شود!

## دایره

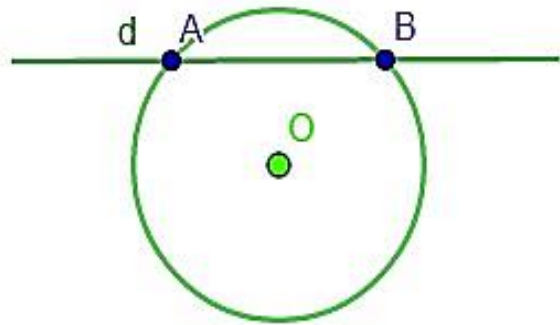
**خط:** از به هم پیوستن بی شمار نقطه خط به وجود می‌آید.  
**دایره:** به مجموعه نقاطی در صفحه که فاصله آن تا یک نقطه مشخص به یک اندازه باشد.



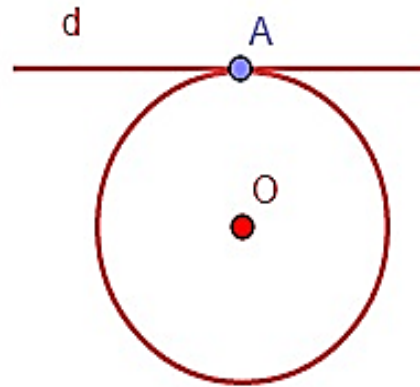
۲- دو خط متمایز در صفحه، یا موازی‌اند یا متقاطع؛ یعنی یا نقطهٔ مشترکی ندارند یا در یک نقطه، یکدیگر را قطع می‌کنند.



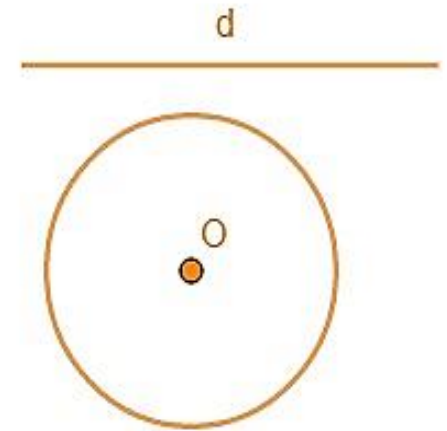
حالا سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت، مشخص کنید که خط و دایره چند نقطهٔ مشترک دارند.



دو نقطه مشترک (وتر)



یک نقطه مشترک (مماس)



بدون نقطه مشترک

در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطهٔ مشترک دارند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

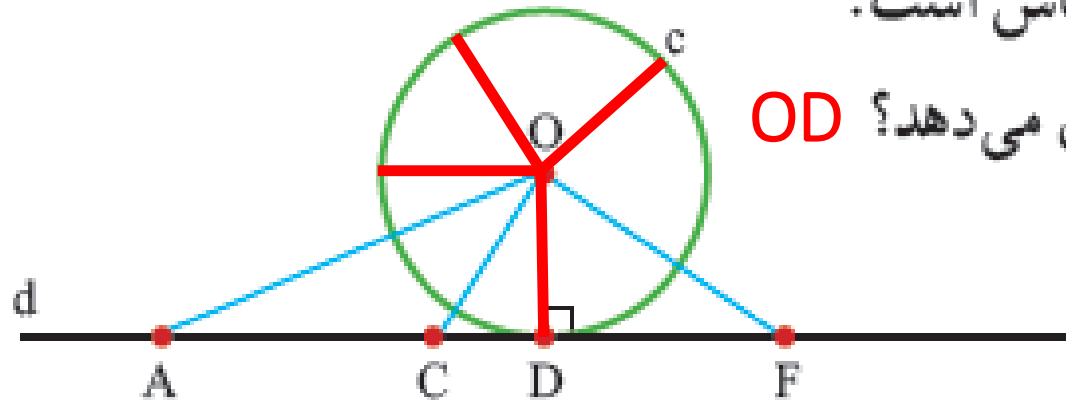
۳- فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که آن نقطه را به خط وصل

می‌کند. خط  $d$  بر دایره  $c$  به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  مماس است.

کدام پاره‌خط فاصله مرکز دایره از خط  $d$  را نشان می‌دهد؟  $OD$

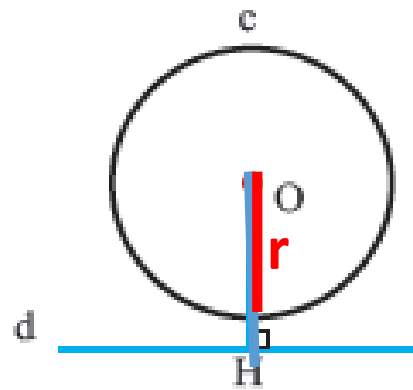
اندازه این پاره‌خط را با  $r$  مقایسه کنید.

**برابر با شعاع دایره است.**

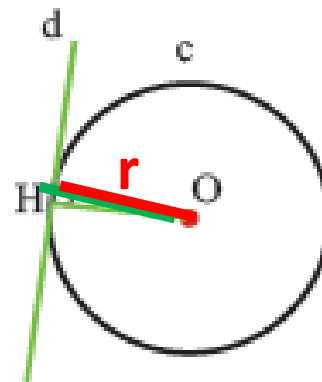


۴- در هر یک از شکل‌های زیر، دایره‌ای به شعاع  $r$  رسم کرده‌ایم. فاصله مرکز دایره از خط  $d$

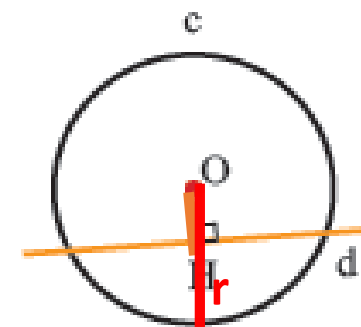
را  $\overline{OH}$  بنامید و بدون اندازه‌گیری، رابطه‌های زیر را با علامت  $>$ ،  $=$ ، یا  $<$  کامل کنید.



$$r \text{ } \left( \text{ } \right) \overline{OH}$$



$$r \text{ } \left( \text{ } \right) \overline{OH}$$

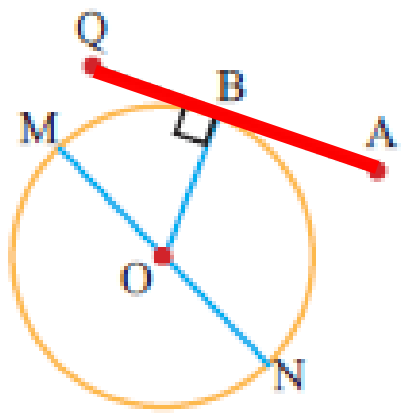


$$r \text{ } \left( \text{ } \right) \overline{OH}$$

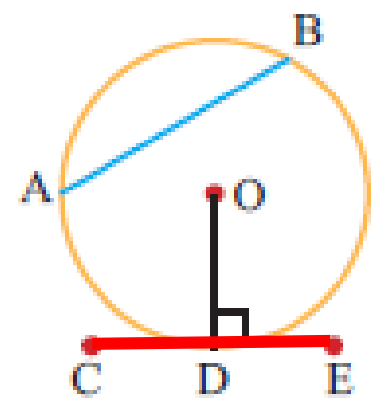


# کار در کلاس

۱- در هر شکل، کدام پاره خط بر دایره مماس است؟

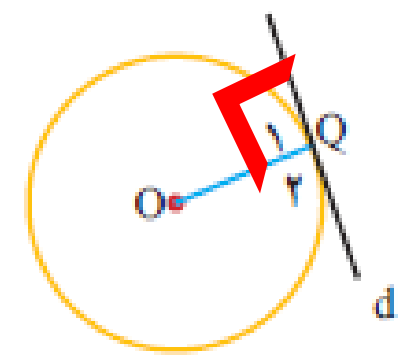
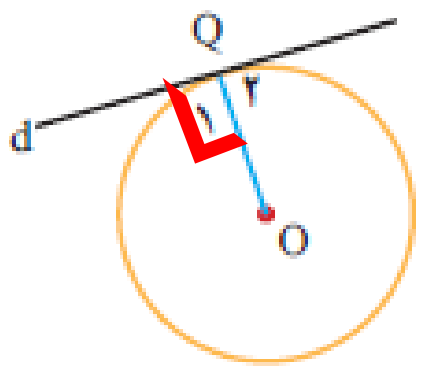


پاره خط QA



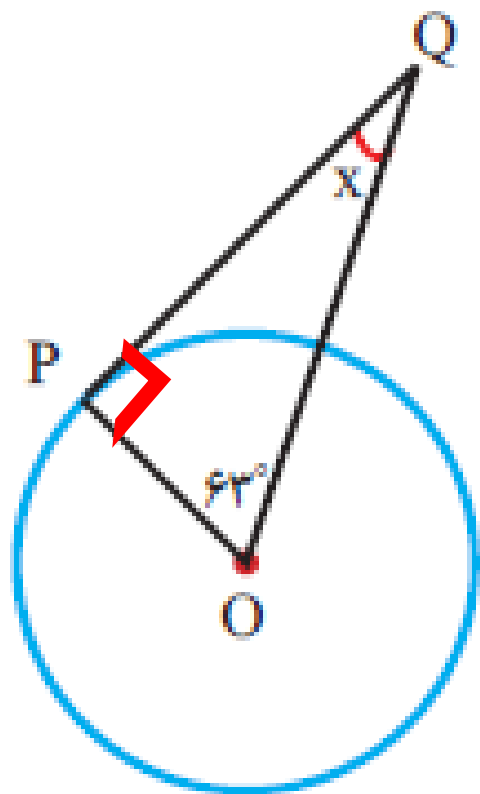
پاره خط CD

۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است. زاویه  $Q_1$  چه نوع زاویه‌ای است؟



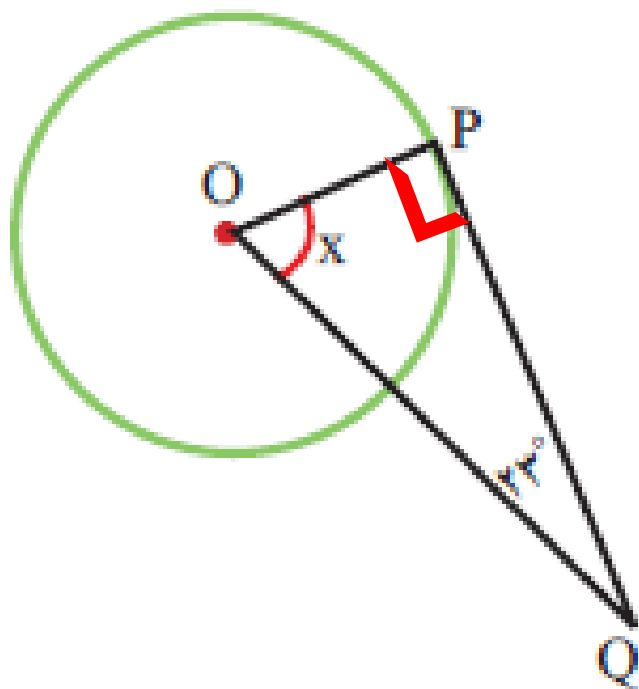
زاویه قائمه

۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



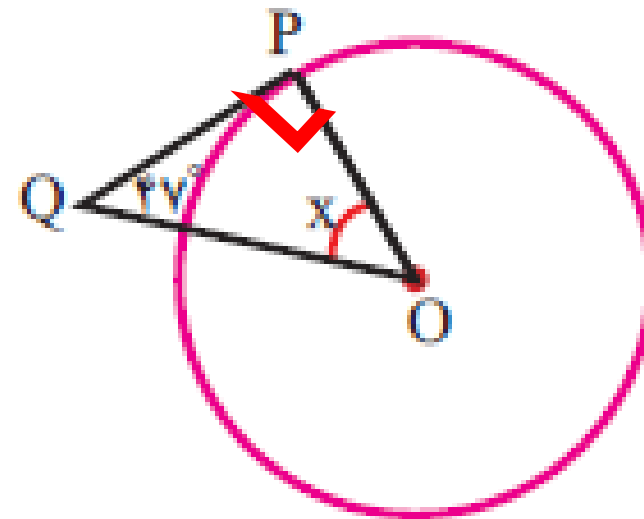
$$90 + 63 = 153$$

$$x = 180 - 153 = 27$$



$$90 + 23 = 113$$

$$x = 180 - 113 = 67$$



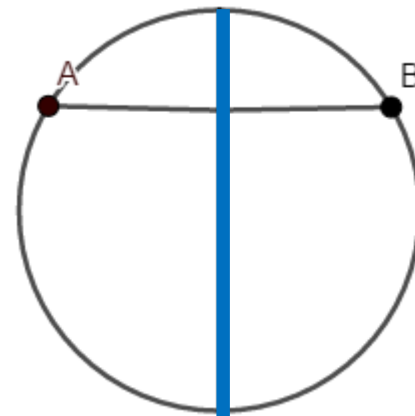
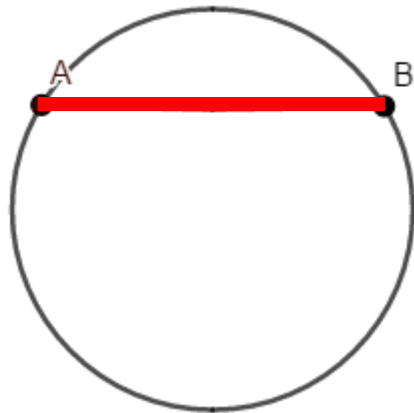
$$90 + 47 = 137$$

$$x = 180 - 137 = 43$$

## فعالیت

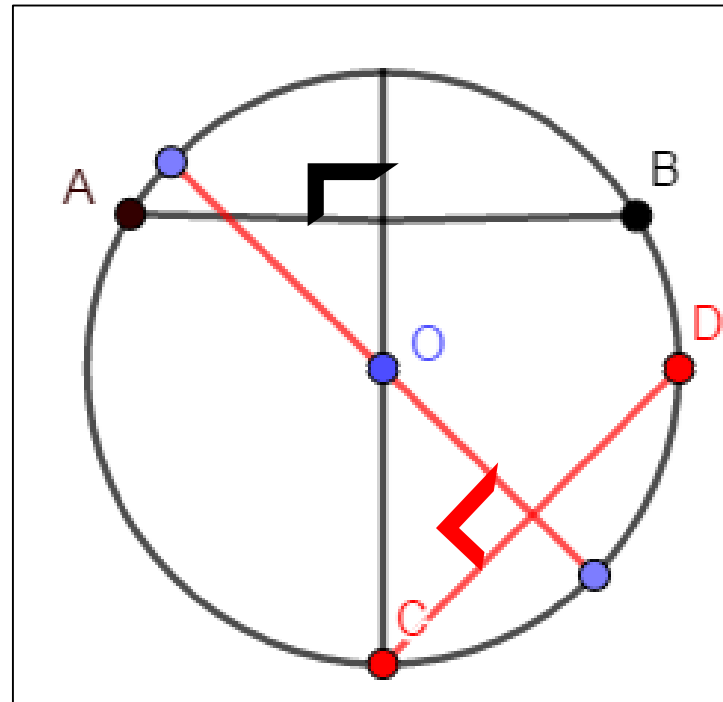


۱- مانند شکل، روی یک ورق کاغذ دایره‌ای رسم کنید؛ سپس، صفحه دایره‌ای شکل را با قیچی جدا کنید. دو نقطه  $A$  و  $B$  را روی دایره قرار دهید.  $A$  را به  $B$  وصل کنید. این پاره خط **وتر دایره** نامیده می‌شود. دایره را طوری تا کنید که نقاط  $A$  و  $B$  روی هم قرار بگیرند. تای کاغذ را باز کنید.



روی خط تا را با مداد پررنگ کنید. در هندسه به این پاره خط چه می‌گویند؟ **قطر دایره**

روی دایره، وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را برای آن تکرار کنید.  
دو پاره خط رسم شده، یکدیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟



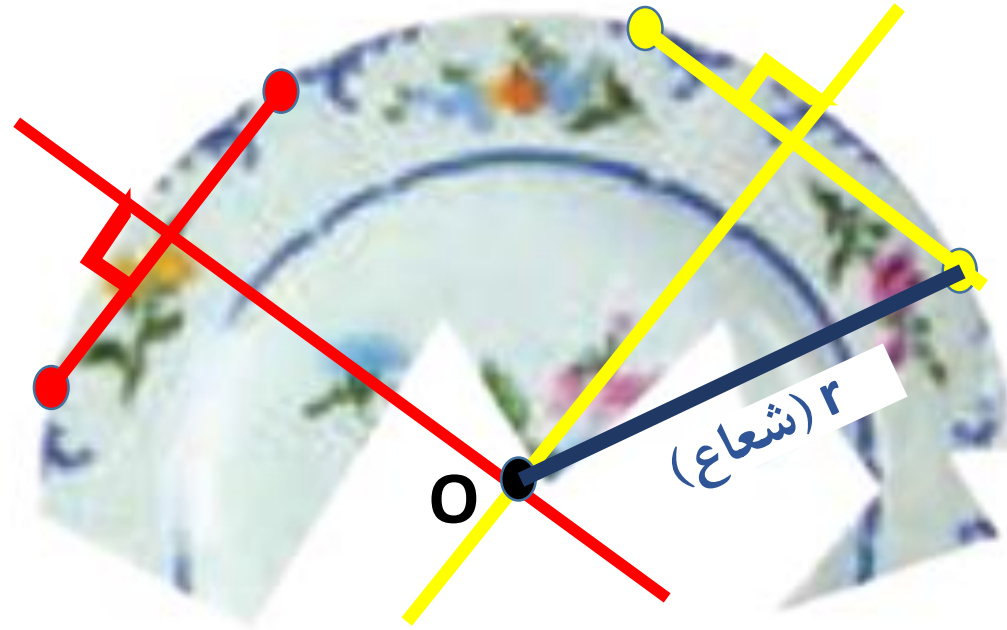
۲- نتیجه فعالیت (۱) را به کمک شکل توضیح دهید.

اگر در یک دایره دو وتر غیر موازی را رسم نماییم و عمود منصف های دو وتر را رسم نماییم ،  
محل برخورد عمود منصف ها همان مرکز دایره است .

۳- قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است. تصویر آن را در شکل می‌بینید.

با توجه به فعالیت‌های قبل، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم اندازه قطر این بشقاب را مشخص کنیم.

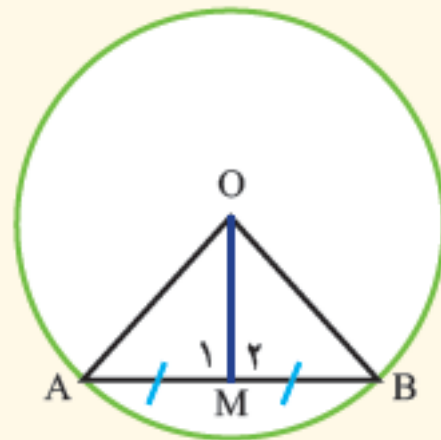
ابتدا دو وتر غیر موازی دایره را رسم نموده و سپس عمود منصف‌های دو وتر را رسم می‌کنیم. محل برخورد عمود منصف‌ها مرکز دایره است. پس شعاع دایره به دست می‌آید. حال اگر شعاع دایره را دو برابر کنیم قطر دایره به دست می‌آید.



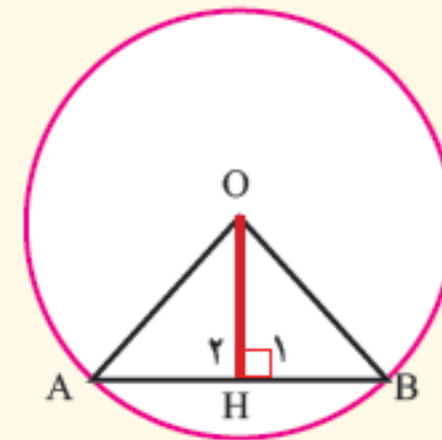
۴- دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن زیر را بخوانید و نتیجه هر یک از آنها را

کامل کنید. این دو چه تفاوتی دارند؟ درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

وسط AB را M می‌نامیم و O را به M وصل می‌کنیم. پس دو مثلث AOM و BOM در حالت سه ضلع با هم برابرند؛ پس  $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$  و چون حاصل جمع این دو زاویه  $180^\circ$  درجه است، پس هر کدام از آنها  $90^\circ$  درجه است.



خطی از O بر AB عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. دو زاویه  $H_1$  و  $H_2$  قائمه‌اند؛ پس دو مثلث قائم‌الزاویه AOH و BOH در حالت وتر و یک ضلع برابرند؛ پس  $\overline{AH} = \overline{BH}$

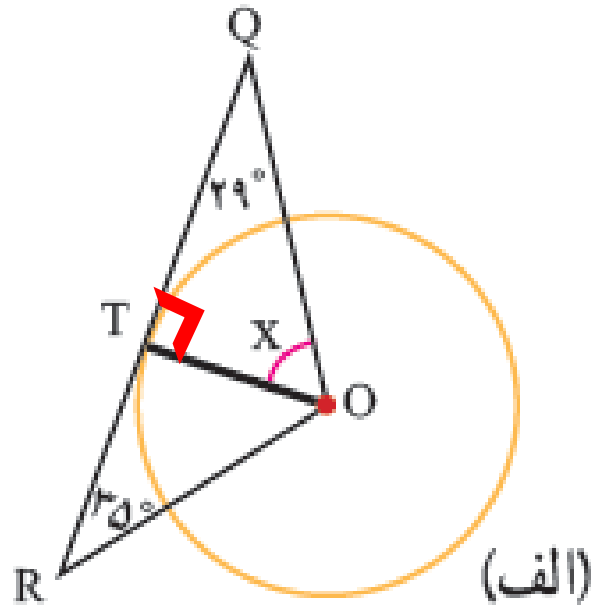


**نتیجه:** خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را **نصف می‌کند**.  
و برعکس، پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند، **بر آن عمود است**.

## کاردر کلاس

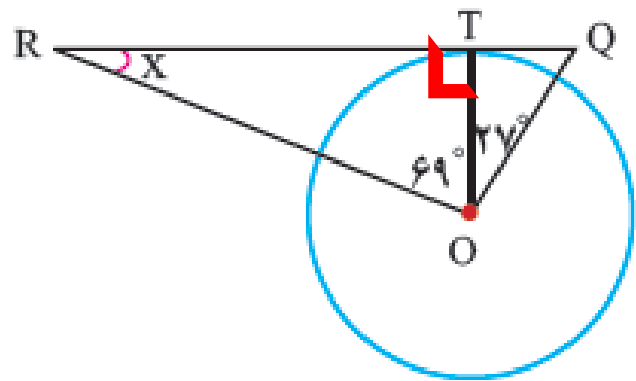


۱- در هر شکل، اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



$$90 + 29 = 119$$

$$X = 180 - 119 = 61$$

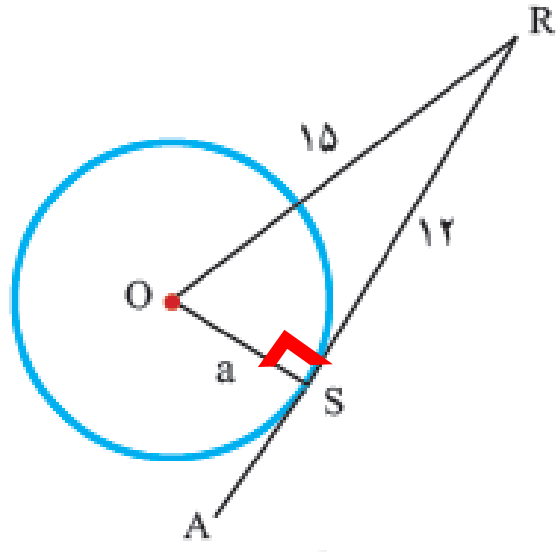


$$90 + 69 = 159$$

$$X = 180 - 159 = 21$$

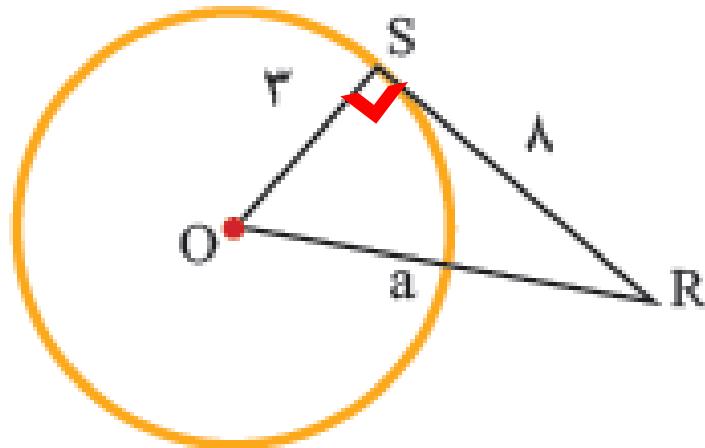
۲- در هر شکل،  $SR$  بر دایره مماس است. مقدار  $a$  را به دست آورید.

چون شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است،  
بنابر این از طریق رابطه فیثاغورس داریم:



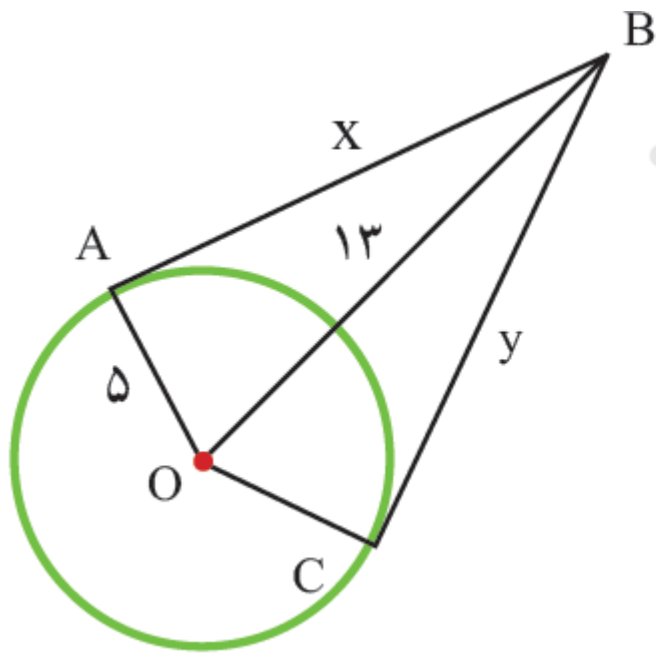
$$a^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$$

$$a = \sqrt{81} = 9$$



$$a^2 = 3^2 + 8^2 = 9 + 64 = 73$$

$$a = \sqrt{73}$$



## تمرین



۱- نقطه B در فاصله ۱۳ سانتی متری مرکز دایره ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد. از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده ایم. فاصله B از هریک از نقاط تماس را به دست آورید.

چون شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است بنابراین مثلث OAB یک مثلث قائم الزاویه است. بر اساس رابطه فیثاغورس در مثلث OAB داریم:

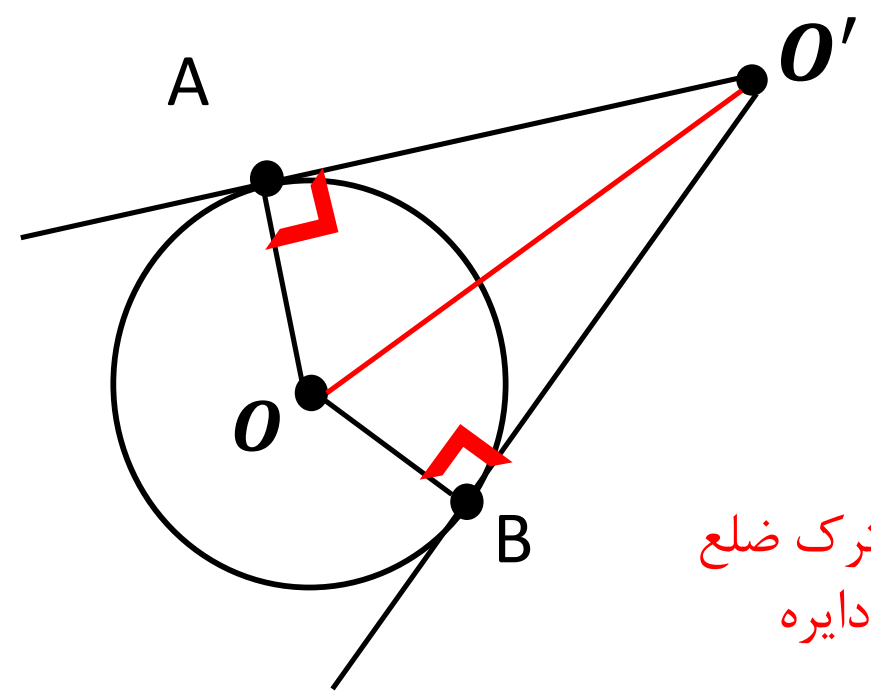
$$x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$

$$x = \sqrt{144} = 12$$

و اگر همین کار را در مثلث OBC انجام دهیم  $y$  نیز برابر ۱۲ بدست خواهد آمد.

۲- از نقطه  $O'$  خارج دایره‌ای به مرکز  $O$  دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را  $A$  و  $B$  بنامید. شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید.

الف) چرا  $\overline{O'A} = \overline{O'B}$  ؟



چون شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است ،  
بنابراین دو مثلث قائم الزاویه به وجود می آید . داریم :

مثلث  $AOO'$  با مثلث  $BOO'$  بنا به حالت  
وتر و یک ضلع هم نهشت هستند . پس :

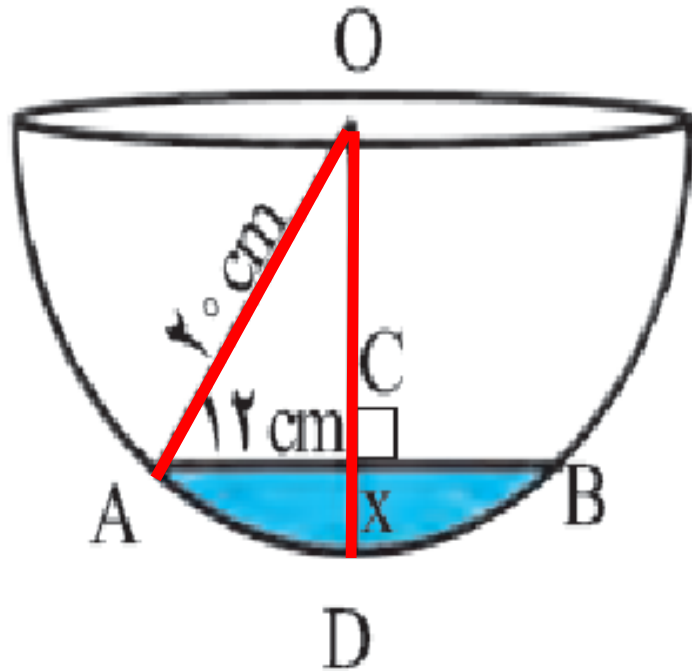
$$\left. \begin{array}{l} OO' = OO' \text{ مشترک ضلع} \\ OA = OB \text{ شعاع دایره} \end{array} \right\}$$

$$\overline{O'A} = \overline{O'B}$$

ب) چرا  $OO'$  نیمساز  $\hat{O}$  است؟  
زیرا اگر مثلث  $AOO'$  با مثلث  $BOO'$  هم نهشت باشند ، تمام اجزای آن ها با هم برابرند . بنابراین :

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \quad \leftarrow \quad OO' \text{ نیمساز } \hat{O} \text{ است}$$

۳- در کاسه‌ کروی روبه‌رو مقداری آب ریخته‌ایم،  
 $\overline{AB}$  برابر ۲۴ سانتی‌متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟



بر اساس رابطه فیثاغورس در مثلث  $OAC$  داریم:

$$OC^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$$

$$\overline{OC} = \sqrt{256} = 16$$

$OA$  و  $OD$  هر دو شعاع دایره اند. پس با هم برابرند.

پس:

$$\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = 20 - 16 = 4$$



## فعالیت



۱- ساعت‌های روبه‌رو چه زمانی را نشان می‌دهند؟

ده و ده دقیقه

پنج دقیقه بعد، هر یک از ساعت‌ها چه زمانی را نشان می‌دهد؟

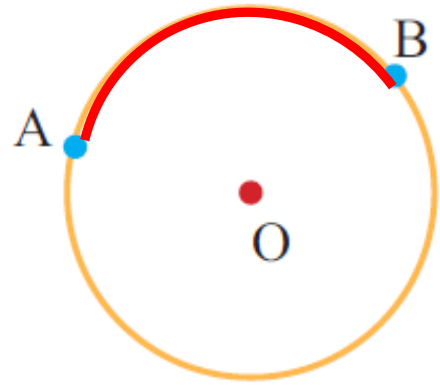
ده و پانزده دقیقه

در این مدت، عقربه دقیقه شمار چند درجه حرکت کرده است؟

$$\frac{360}{12} = 30$$

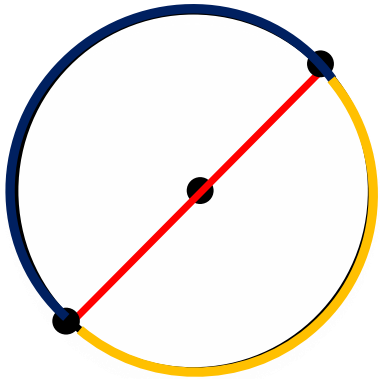
در هر یک از ساعت‌ها مسیر حرکت عقربه دقیقه‌شمار را رنگ کنید. نوک کدام عقربه مسیر طولانی‌تری را طی کرده است؟

مسلمانان در دایره بزرگتر مسیری که عقربه روی محیط دایره طی کرده است، بیشتر است.



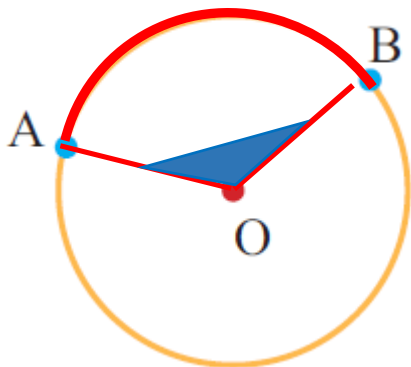
۲- الف) دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده‌اند.  
 کمان کوچک‌تر را با  $\widehat{AB}$  نمایش می‌دهیم و آن را کمان AB می‌نامیم.

آیا ممکن است دو نقطه، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید.  
**بله، در صورتی که این دو نقطه در دو سر قطر دایره قرار گرفته باشند.**

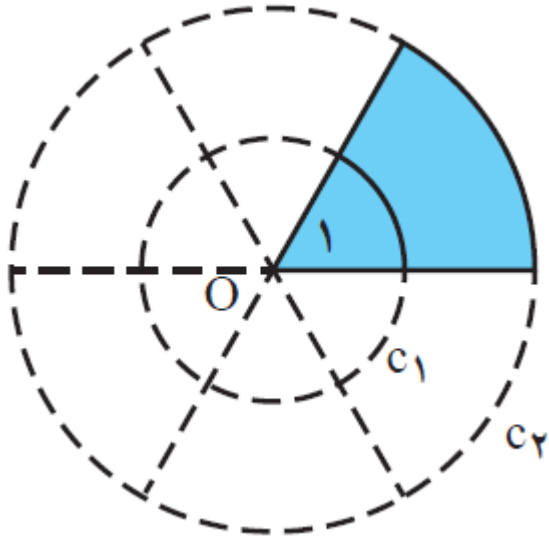


ب) مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.

زاویه AOB زاویه مرکزی رو به رو به کمان AB نامیده می‌شود.



کمان AB نیز رو به رو به زاویه مرکزی AOB است.



۳- شکل روبه‌رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.  
زاویه  $O_1$  چه کسری از  $360^\circ$  درجه است؟

به دلیل اینکه دایره به شش قسمت مساوی تقسیم شده است. بنابراین:

$$360 \div 6 = 60 \quad \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

کمان روبه‌رو به  $O_1$  در دایره  $c_1$  چه کسری از دایره  $c_1$  است؟

$$\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

کمان روبه‌رو به  $O_1$  در دایره  $c_2$  چه کسری از دایره  $c_2$  است؟

آیا این دو کسر با هم مساوی‌اند؟ **بله**

آیا طول این دو کمان مساوی است؟ **خیر**

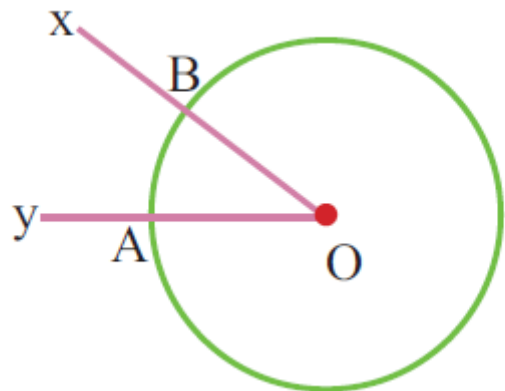
اندازه کمان  $\widehat{AB}$ ؛ با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به آن برابر است؛ بنابراین، ممکن است دو

کمان با اندازه‌های مساوی، طول‌های متفاوتی داشته باشند.

۴- چرا در فعالیت (۳) اندازه کمان روبه‌رو به  $O_1$  در هر یک

از دایره‌های  $C_1$  و  $C_2$  برابر  $60^\circ$  درجه است؟

به دلیل اینکه اندازه کمان هر دایره دلخواه برابر با  $360^\circ$  درجه است و از آنجا که هر دو دایره به شش قسمت مساوی تقسیم شده بودند، پس اندازه کمان روبروی زاویه  $O_1$  در هر دو دایره برابر با  $60^\circ$  درجه است.



۵- در شکل رو به رو زاویه  $xOy$  برابر  $36^\circ$  درجه است.

کمان  $AB$  چند درجه است؟

از آنجا که در دایره اندازه هر زاویه مرکزی با کمان روبروی آن برابر است، پس اندازه کمان  $AB$  نیز با زاویه روبروی آن برابر بوده و  $36^\circ$  درجه است.

طول کمان  $AB$  چه کسری از دایره است؟

$$\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$$

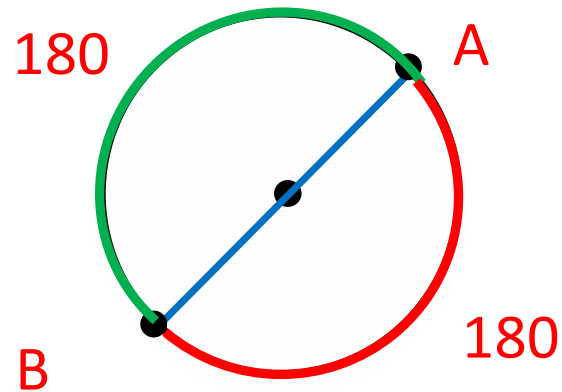
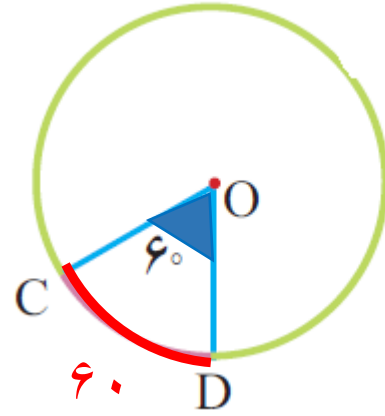
$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ}$$

برای پاسخ دادن به این پرسش از تساوی روبه‌رو کمک بگیرید.

## کار در کلاس



۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است.  
اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.



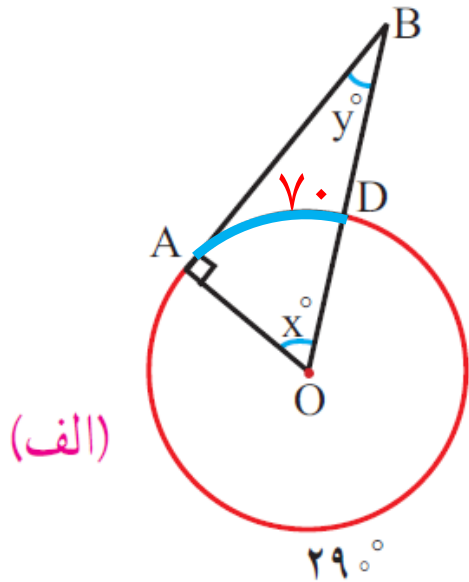
## ۲- اندازه کمان و زاویه های مجهول را پیدا کنید.

از آنجا که کمان یک دایره کامل ۳۶۰ درجه است ، داریم

$$360-290=70$$

و چون اندازه هر زاویه مرکزی با کمان روبروی آن برابر است پس  $x=70$   
همچنین مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر ۱۸۰ درجه است . بنابراین :

$$y=180-(70+90)=20$$

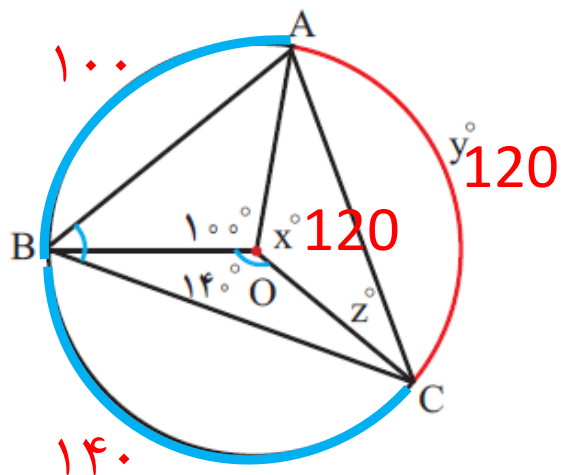


$$Y=360-(140+100)=120$$

همچنین با توجه به اینکه مثلث AOC متساوی الساقین است ( ساق های آن شعاع دایره هستند) پس زاویه های مجاور به ساق نیز باهم برابرند. داریم :

$$180-120=60$$

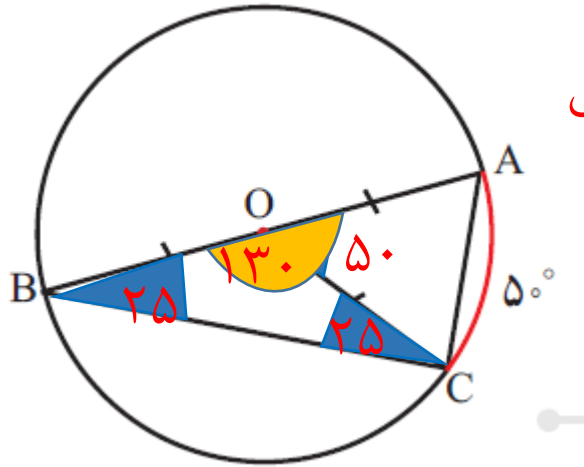
$$Z=60 \div 2=30$$



۳- در شکل روبه‌رو،  $AB$  قطر دایره است.

زاویه  $B$  چند درجه است؟

از آنجا که در دایره اندازه هر زاویه مرکزی با کمان روبروی آن برابر است، پس



زاویه  $O_1$  برابر  $50$  درجه است. و از آنجا که  $O_1 + O_2 = 180$  بنابراین  $O_2$  برابر  $130$  درجه است.

چون مثلث  $OAB$  متساوی الساقین است

(دو ساق مثلث شعاع دایره هستند)

پس اندازه زاویه های مجاور با دو ساق با هم برابر است.

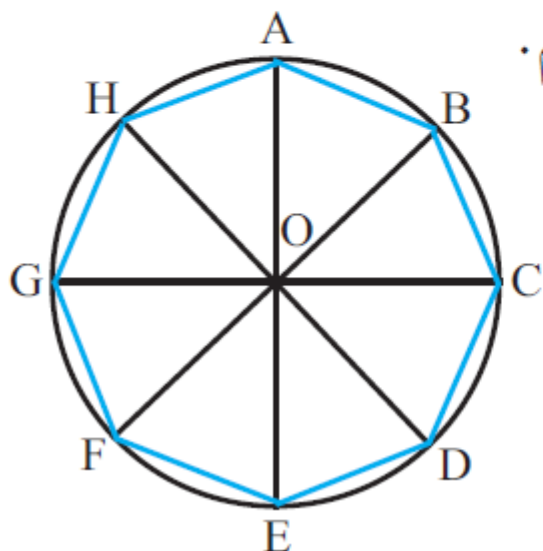
$$180 - 130 = 50$$

$$50 \div 2 = 25$$

## فعالیت



۱- محیط دایرهٔ روبه‌رو را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم بدانیم چرا هشت ضلعی  $ABCDEFGH$  منتظم است. رضا برای اثبات این مطلب دلایل زیر را بیان می‌کند: «مثلث‌های  $AOB$ ،  $BOC$ ،  $COD$  و... متساوی الساقین‌اند. چرا؟ زیرا ساق‌های این مثلث‌ها شعاع‌های دایره هستند.

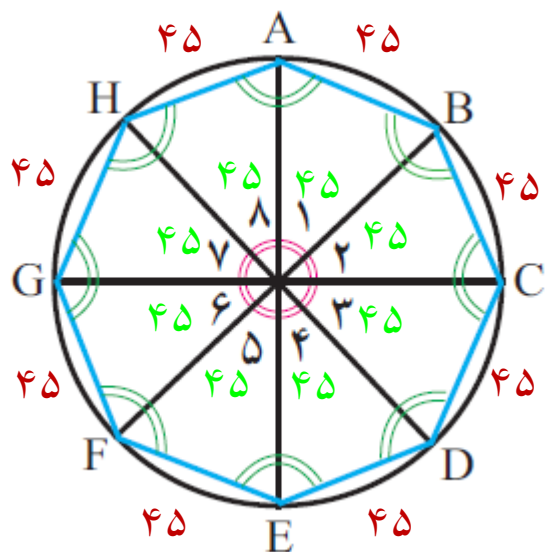


و  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \dots$ ، پس همهٔ زاویه‌های سبز رنگ با هم برابرند.

چرا؟ از آنجا که دایره به هشت کمان برابر تقسیم شده است، اندازه هر کمان برابر است با:  $45$

$$360 \div 8 = 45$$

و چون هر زاویه داخلی با کمان روبروی آن برابر است پس زاویه‌های  $O_1$  تا  $O_8$  با هم برابرند و اندازه هر کدام  $45$  درجه می‌باشد.



حال چون همه مثلث ها متساوی الساقین هستند . اندازه زاویه های مجاور به ساق با هم برابر است . داریم:

$$\text{اندازه زاویه مجاور به هر ساق} = 180 - 45 = 135 \div 2 = 67.5$$

$$\text{اندازه هر زاویه سبز} = 67.5 \times 2 = 135$$

پس تمام زاویه های هشت ضلعی منتظم با هم برابر و هر کدام مساوی ۱۳۵ درجه است.

آرش می گوید : «ولی این تنها برابری زاویه ها را نشان می دهد

و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع های هشت ضلعی

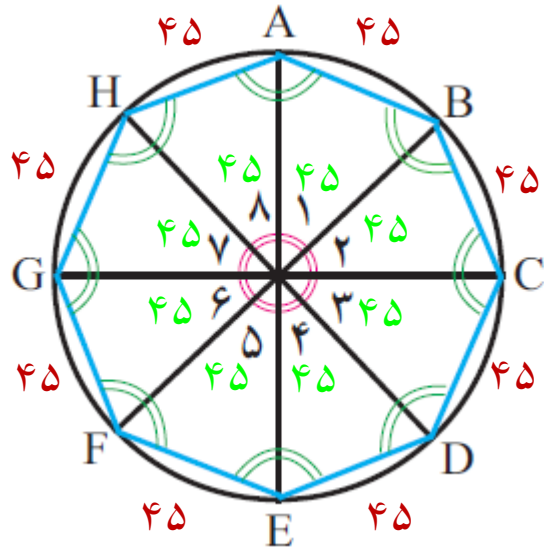
پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.»

بعد ادامه می دهد : «مثلث های AOB، BOC، COD و ... هم نهشت اند؛ در چه حالتی؟ دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)

پس ...  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots$  ؛ یعنی ضلع های هشت ضلعی هم مساوی اند.»

هر جا لازم است، توضیحاتی به دلایل رضا و آرش اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن هشت

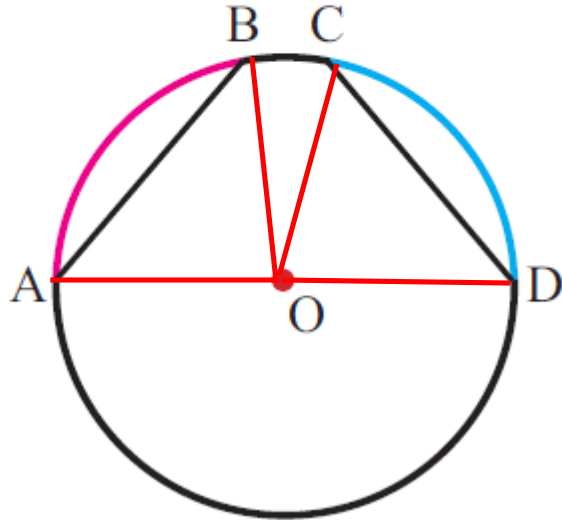
ضلعی کامل شود. چون تمام اضلاع و تمام زاویه های هشت ضلعی برابرند پس هشت ضلعی منتظم است.



۲- برای هر مورد دلیل بیاورید.

الف) فرض کنید  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ .

چرا  $\overline{AB} = \overline{CD}$  ؟



ابتدا مرکز دایره را به نقاط A و B و C و D وصل می کنیم تا دو مثلث ایجاد شود. چون دو کمان AB و CD با هم برابرند پس زاویه های مرکزی روبروی آنها نیز با هم برابرند. داریم :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OC} \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \\ \overline{OB} = \overline{OD} \end{array} \right\}$$

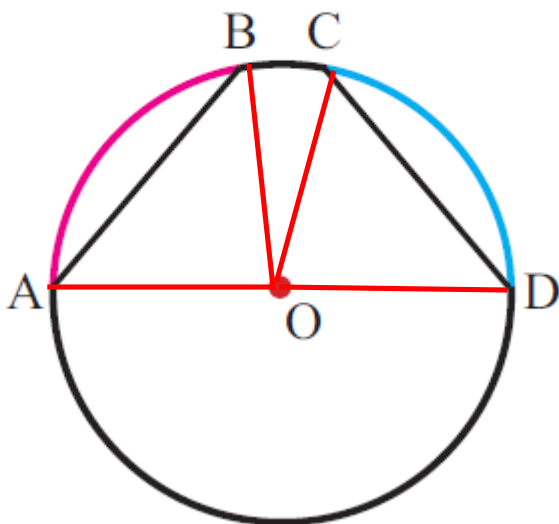
دو مثلث OAB و OCD بنا به حالت دوضلع و زاویه بین هم نهشت هستند . پس تمام اجزای متناظر این دو مثلث با هم برابرند . بنابراین :

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

نکته : وتر های نظیر کمان های مساوی با یکدیگر برابرند.

ب) فرض کنید  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

چرا  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟



ابتدا مرکز دایره را به نقاط A و B و C و D وصل می کنیم تا دو مثلث ایجاد شود. چون دو وتر AB و CD با هم برابرند داریم:

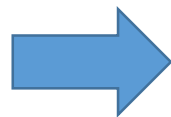
$$\overline{OA} = \overline{OC}$$

$$\overline{OB} = \overline{OD}$$

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

دو مثلث OAB و OCD بنا به حالت سه ضلع با یکدیگر هم نهشت هستند. پس تمام اجزای متناظر این دو مثلث با هم برابرند. بنابراین:

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$$



$$\widehat{AB} = \widehat{CD}$$

**نکته:** کمان های نظیر وتر های مساوی با یکدیگر برابرند.

نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید.

اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد، اندازه وترهای نظیر این دو کمان نیز با هم برابرند.

به عکس، اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد، اندازه کمان های نظیر این دو وتر نیز با هم برابرند.

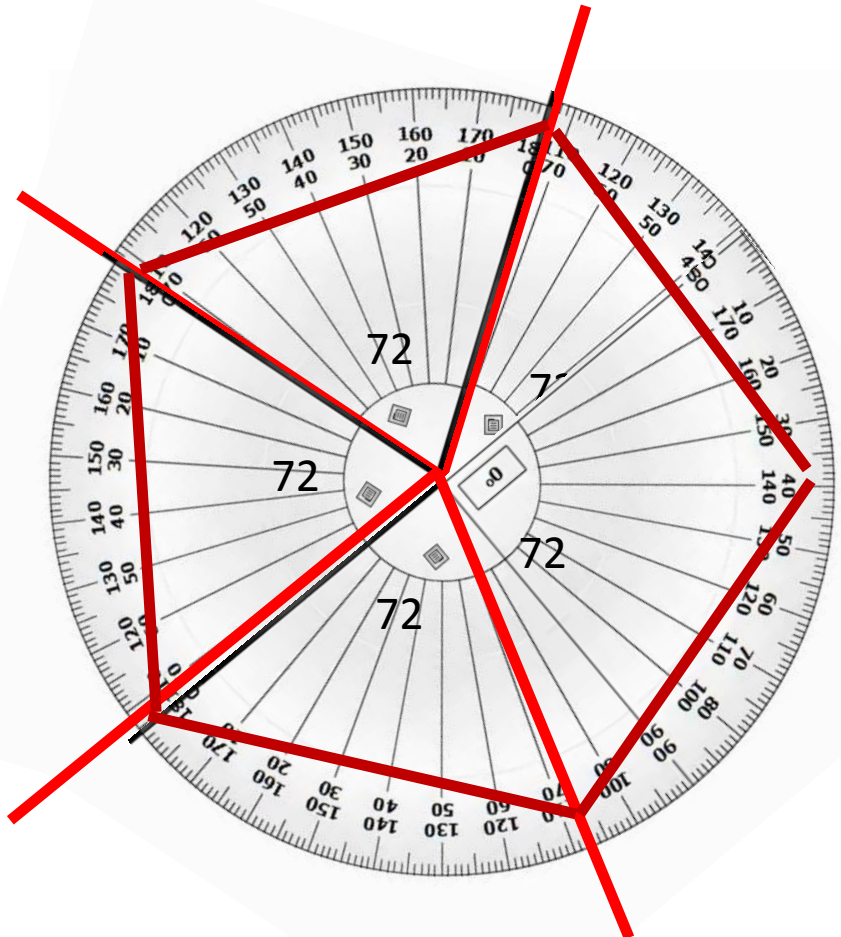
# کار در کلاس



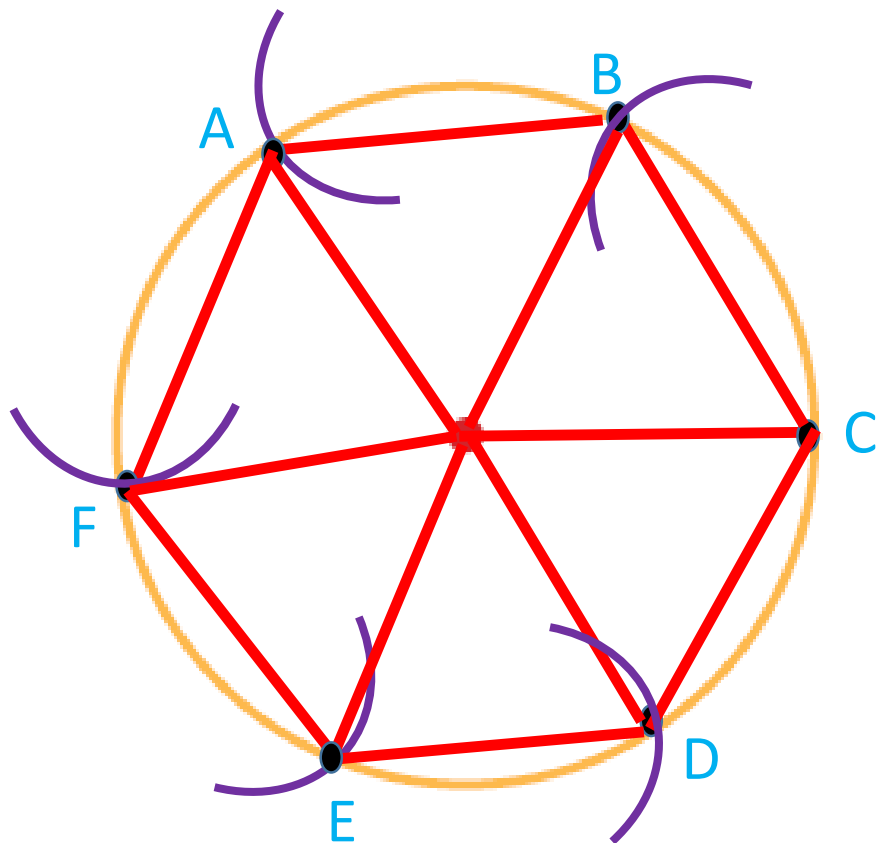
۱- با استفاده از خط کش و نقاله در دایره روبه‌رو

یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید.

$$360 \div 5 = 72$$



۲- الف) دهانه پراگار را به اندازه شعاع دایره زیر باز کنید. از یک نقطه دایره، شروع کنید و پی در پی کمان بزنید.



ب) بدین ترتیب، دایره به چند کمان تقسیم می شود؟  
ج) چرا این کمان ها با هم مساوی اند؟

به دلیل اینکه وترهای نظیر آنها با هم برابرند.

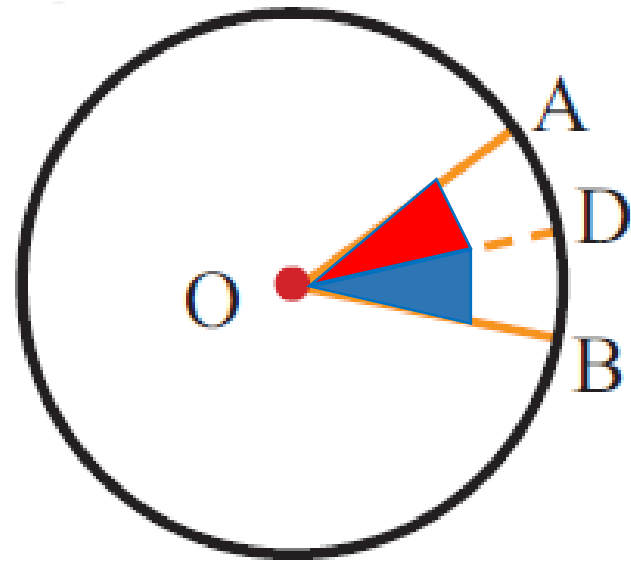
د) هر کمان چند درجه است؟  $360 \div 6 = 60$

ه) چند کمان  $120^\circ$  درجه در شکل دیده می شود؟

نقاط را نام گذاری می کنیم. شش پاره خط در شکل مشاهده می شود.

$AC \quad BD \quad CE \quad DF \quad EA \quad FB$

## تمرین



۱- OD نیمساز زاویه مرکزی AOB است و  $\hat{AOB} = 36^\circ$ . اندازه هر یک از کمان های AD و BD چند درجه است؟

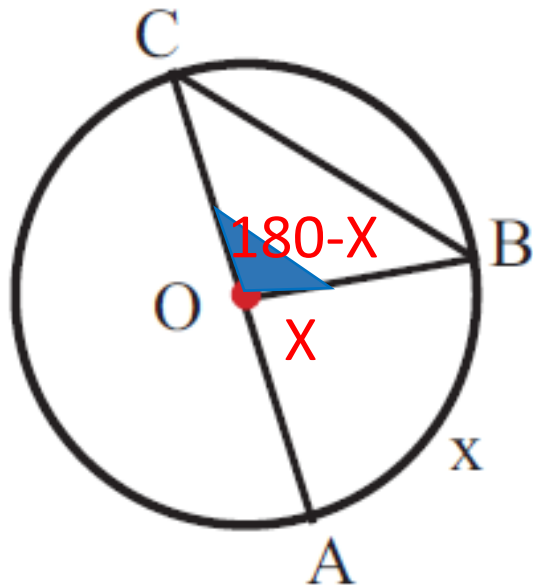
$$36 \div 2 = 18$$

۲- کمان AB برابر x درجه است.

اندازه زاویه AOB را بر حسب x به دست آورید.

اندازه زاویه مرکزی با کمان روبروی آن برابر است.

اندازه زاویه ACB را بر حسب x به دست آورید.

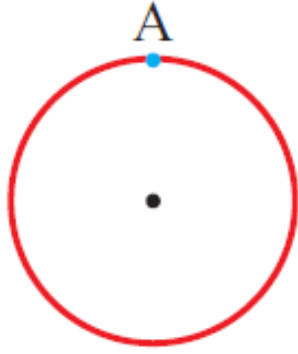
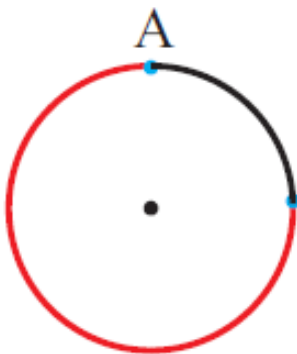
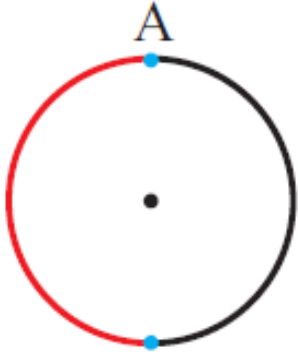
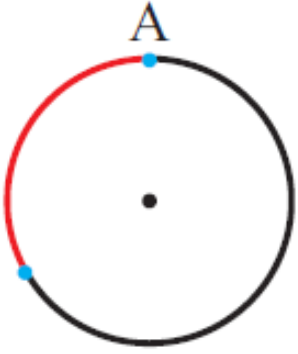
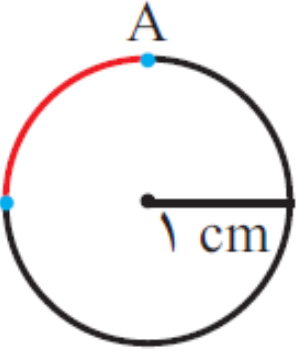


$$B + C + O = 180$$

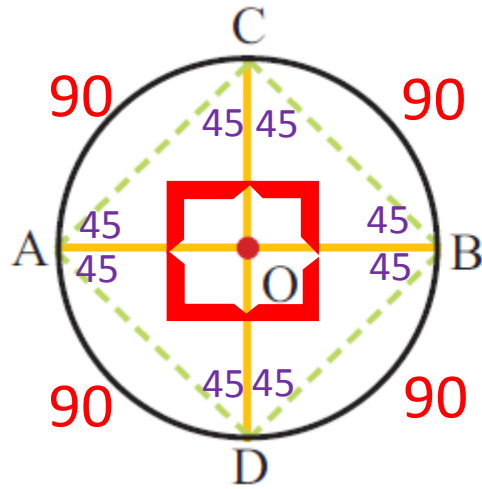
$$C + C + 180 - x = 180 \Rightarrow 2C = x \Rightarrow C = \frac{x}{2}$$

۳- متحرکی از نقطه A روی دایره‌ای به شعاع یک سانتی متر شروع به حرکت می‌کند. در هر

شکل، کمان طی شده مشخص شده است. جدول را کامل کنید.

					شکل
$\frac{4}{4} = 1$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	کسر طی شده از دایره
360	۲۷۰	۱۸۰°	۱۲۰	۹۰°	اندازه کمان طی شده
$۲\pi = \text{محیط}$	$2\pi \times \frac{3}{4}$	$\frac{2\pi}{2} = \pi$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۴}$	طول تقریبی کمان طی شده

۴- قطرهای AB و CD بر هم عمودند.



الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD و DA با هم مساوی‌اند؟

کمان‌های روبروی زاویه‌های مرکزی برابر (قائمه) هستند.

ب) آیا وترهای AC، CB، BD و DA نیز با هم مساوی‌اند؟

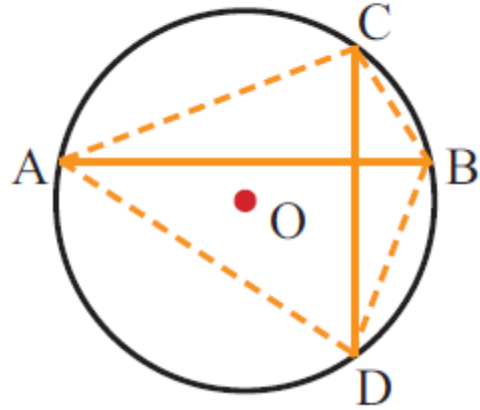
آری - وترهای نظیر کمان‌های مساوی با یکدیگر برابرند.

ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ABCD با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

از آنجا که چهار مثلث متساوی‌الساقین داریم (ساق‌ها شعاع‌های دایره‌اند) بنابراین زاویه‌های مجاور به ساق با هم برابر و هرکدام ۴۵ درجه هستند. و چون زاویه‌های چهارضلعی ABCD هرکدام از دو زاویه ۴۵ درجه تشکیل شده است بنابراین همه آنها با هم برابر و مساوی ۹۰ درجه هستند.

۵- در شکل روبه‌رو، وترهای  $AB$  و  $CD$  بر هم عمودند.

الف) آیا کمان‌های  $AC$ ،  $CB$ ،  $BD$  و  $DA$  با هم مساوی‌اند؟ **خیر**



ب) پاسختان را با پاسخ تمرین قبل مقایسه کنید.

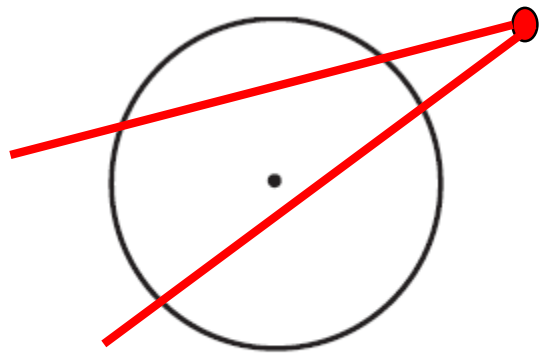
این دو تمرین چه تفاوتی دارند؟

در قسمت قبل وترها در مرکز دایره بر هم عمود بودند و زاویه‌های مرکزی قائمه را به وجود آوردند. اما در این قسمت دو وتر در خارج از مرکز بر هم عمودند. پس زاویه‌های قائمه ایجاد شده، مرکزی نیستند و بنابراین زاویه‌های روبروی آنها با هم برابر نیستند.



۱- مانند نمونه رسم شده (الف) در شکل‌های زیر نمونه‌ای از هر یک از وضعیت‌های

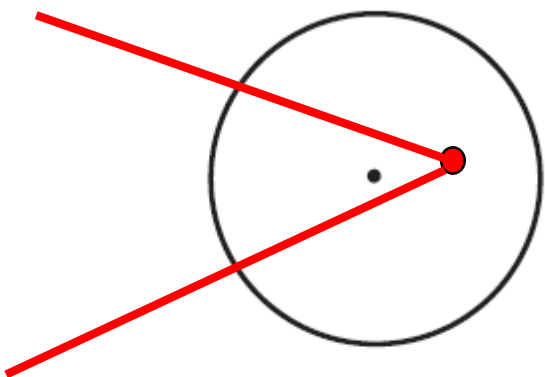
مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید.



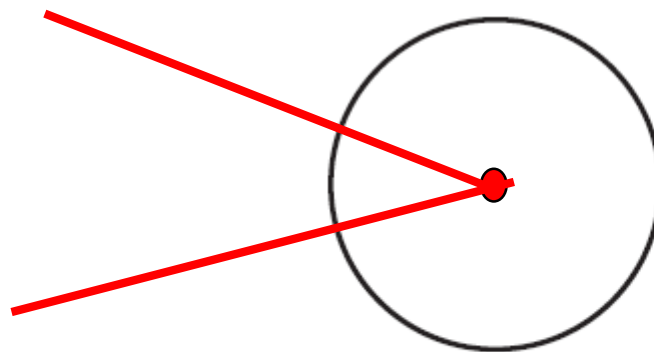
(ب) رأس زاویه خارج دایره



(الف) رأس زاویه روی دایره



د) رأس زاویه داخل دایره در نقطه‌ای غیر از مرکز

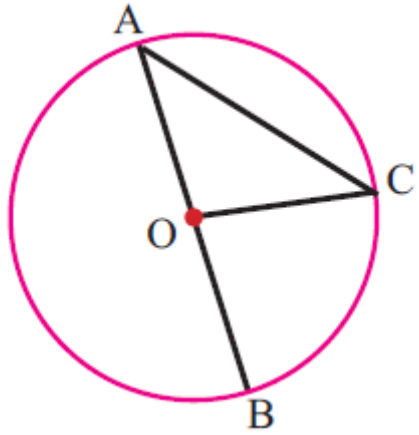


ج) رأس زاویه در مرکز دایره

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟ در حالت ج

به زاویه‌ای که در شکل «الف» مشاهده می‌کنید، **زاویه محاطی** گفته می‌شود. رأس این زاویه روی دایره است و ضلع‌های آن، دایره را قطع کرده‌اند.

۲- اندازه زاویه مرکزی BOC را بر حسب  $\widehat{BC}$  بنویسید:  $\widehat{BOC} = \widehat{BC}$



چرا زاویه‌های A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟

زیرا مثلث AOC متساوی الساقین است و ساق‌های آن شعاع‌های دایره می‌باشند.

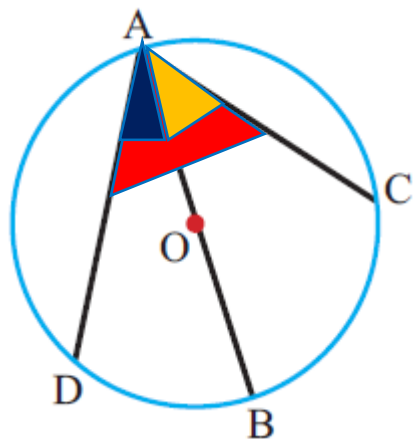
چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟

از آنجا که زاویه BOC زاویه خارجی مثلث AOC می‌باشد بنابراین اندازه آن با مجموع دو زاویه A و C برابر است.

$$\widehat{BOC} = \hat{A} + \hat{C}$$

اندازه زاویه محاطی BAC را بر حسب  $\widehat{BC}$  بنویسید.  $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

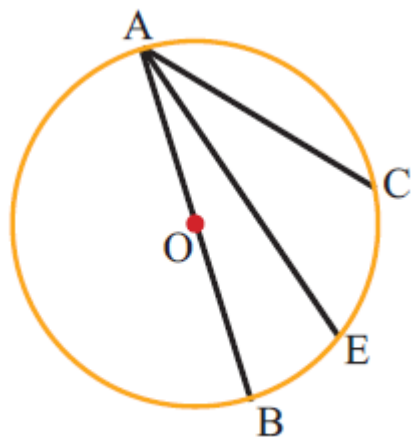
$$\widehat{BOC} = \hat{A} + \hat{C} \xrightarrow[\widehat{BOC} = \widehat{BC}]{\hat{A} = \hat{C}} \widehat{BC} = 2\hat{A} \xrightarrow{\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}}$$



۳- با توجه به فعالیت قبل با پر کردن جاهای خالی  
اندازه زاویه محاطی DAC را بر حسب  $\widehat{DC}$  بنویسید.

$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$

۴- با پر کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی EAC  
را هم بر حسب  $\widehat{EC}$  بنویسید.



$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} = \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{EC}}{2}$$

۵- پاسخ فعالیت‌های (۲)، (۳) و (۴) را با هم مقایسه کنید. آیا در این سه فعالیت، همهٔ حالت‌های زاویهٔ محاطی بررسی شده‌اند؟ عبارت زیر را کامل کنید. **بله**

اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با **نصف کمان روبروی آن**

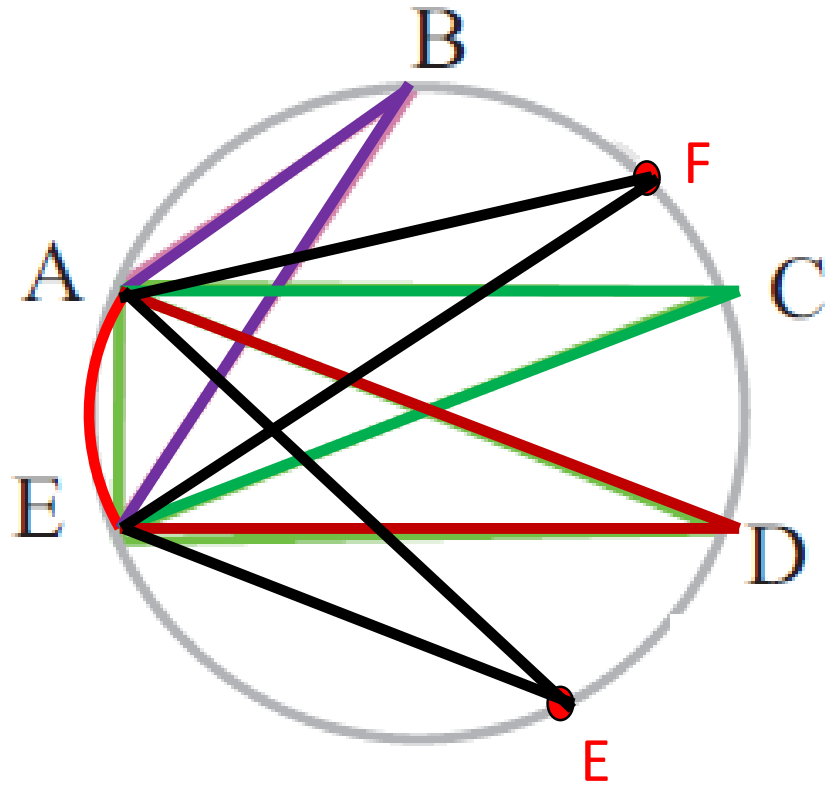
## کار در کلاس



۱- با توجه به شکل روبه‌رو،

الف) زاویه‌های محاطی مقابل به  $\widehat{AE}$  را پیدا کنید.

زاویه B    زاویه C    زاویه D



ب) دو زاویه محاطی دیگر رسم کنید که  $\widehat{AE}$  کمان مقابل به آنها نیز باشد.

زاویه E    زاویه F

۲- در شکل روبه‌رو، اندازه زاویه محاطی C را تعیین کنید.  
 دو دانش‌آموز به این سؤال جواب داده‌اند.  
 راه‌حل‌های آنها را توضیح دهید.

زهرا

$$\hat{O}_1 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

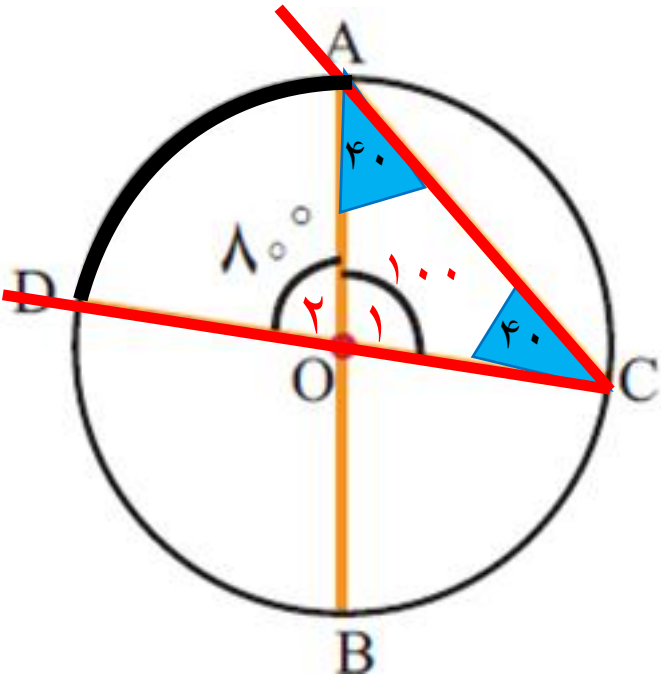
$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{C} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

فاطمه

$$\hat{O} = 80^\circ \longrightarrow \widehat{AD} = 80^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$



از آنجا که زاویه  $O_2$  برابر  $80^\circ$  درجه است بنابراین  $O_1$  برابر  $100^\circ$  درجه است.  
 و چون مثلث AOC متساوی الساقین است (ساق‌های آن شعاع‌های دایره هستند)  
 پس اندازه هر دو زاویه با هم برابر است و هر کدام  $40^\circ$  درجه می‌باشند.

چون  $O_2$  زاویه مرکزی و  $80^\circ$  درجه است پس کمان روبروی آن نیز برابر  $80^\circ$  درجه است  
 و زاویه C که یک زاویه محاطی است به اندازه نصف کمان روبروی آن یعنی  $40^\circ$  درجه است.

## فعالیت



۱- یک زاویهٔ محاطی مقابل به کمان  $AB$  رسم کنید.

**زاویه C**

سه زاویهٔ محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید.

**زاویه F**

**زاویه E**

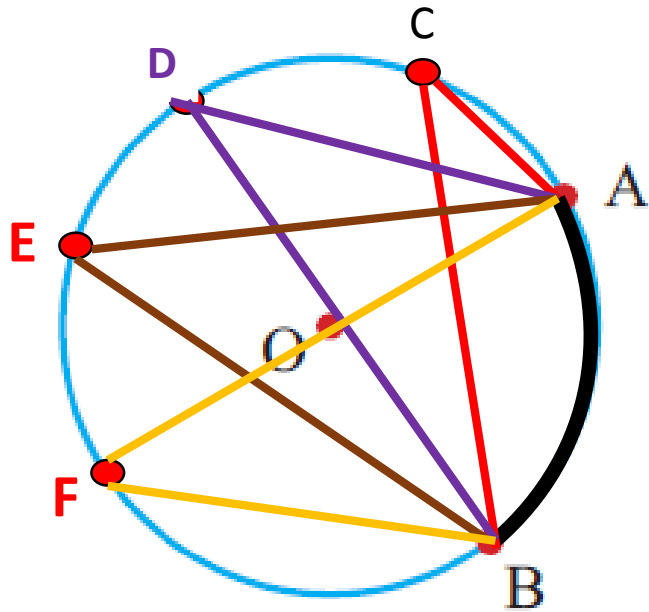
**زاویه D**

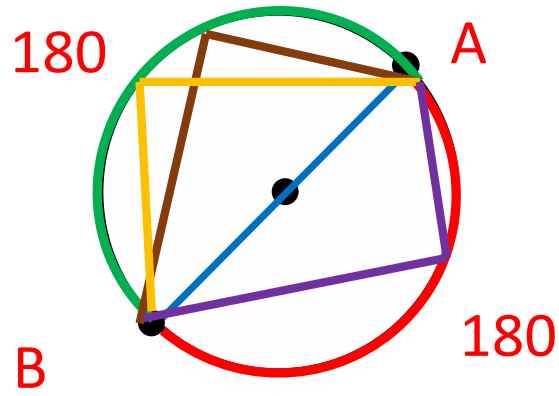
فکر می کنید چند زاویهٔ دیگر می توان رسم کرد؟ چرا؟

**بی شمار - زیرا بی شمار نقطه روی محیط دایره وجود دارد.**

آیا همهٔ این زاویه‌های رسم شده با هم برابرند؟ چرا؟

**بله - زیرا همه آنها روبروی یک کمان مشترک هستند و چون محاطی اند ، اندازه همه آنها نصف کمان  $AD$  می باشد.**





۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.  
اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟

۱۸۰ درجه ، زیرا قطر دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می کند.

چند زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

چند زاویه محاطی می توان رسم کرد؟ چرا؟

بی شمار ، زیرا بی شمار نقطه روی محیط دایره وجود دارد .

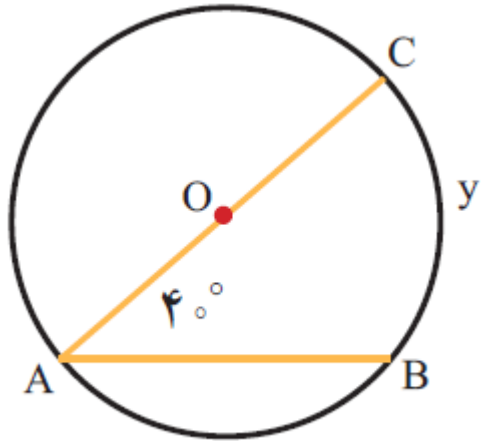
اندازه این زاویه های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

۹۰ درجه ، زیرا همه آنها زاویه محاطی روبروی قطر هستند و اندازه آنها نصف کمان روبروی آن می باشد.

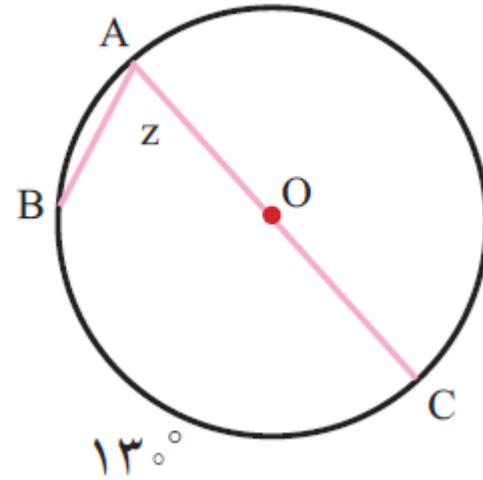
## کاردر کلاس



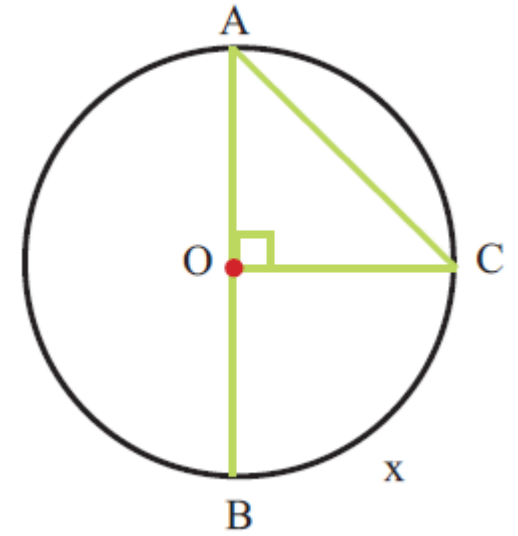
۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های خواسته شده را پیدا کنید.



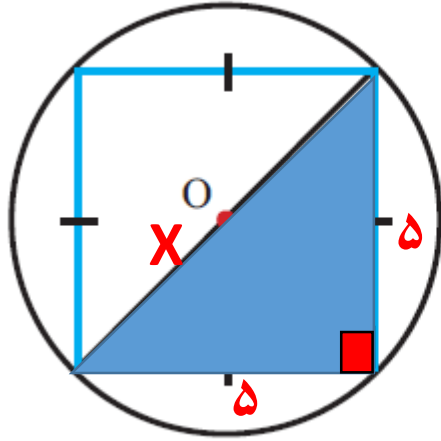
$$\frac{y}{2} = 40$$
$$y = 2 \times 40 = 80$$



$$z = \frac{130}{2} = 65$$



$$x = 90$$



۲- در شکل روبه‌رو، همهٔ رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر روی دایره قرار دارد.

چرا این لوزی، مربع است؟

به دلیل اینکه دارای زاویه محاطی روبرو به قطر است  
و اندازه زاویه محاطی روبرو به قطر ۹۰ درجه است.  
و بنابراین لوزی با یک زاویه قائمه، مربع است.

قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

در مثلث قائمه آبی رنگ بر اساس رابطه فیثاغورث داریم:

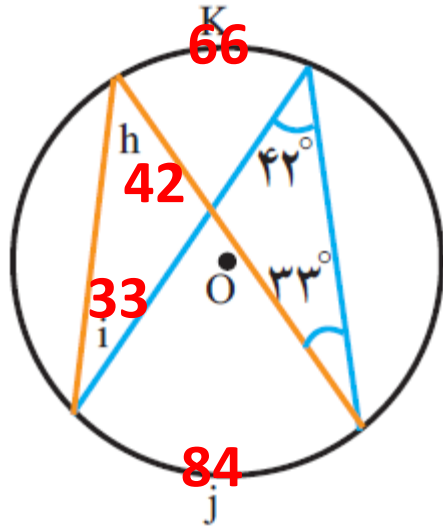
$$x^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

$$x = \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 25} = 5\sqrt{2}$$

## تمرین



۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.

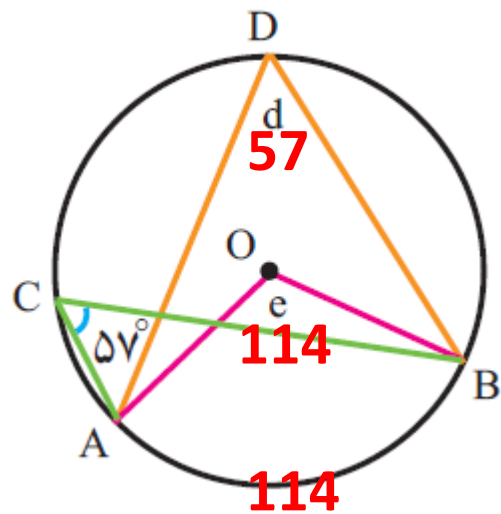


$$j = 2 \times 42 = 84$$

$$h = 84 \div 2 = 42$$

$$k = 33 \times 2 = 66$$

$$i = 66 \div 2 = 33$$



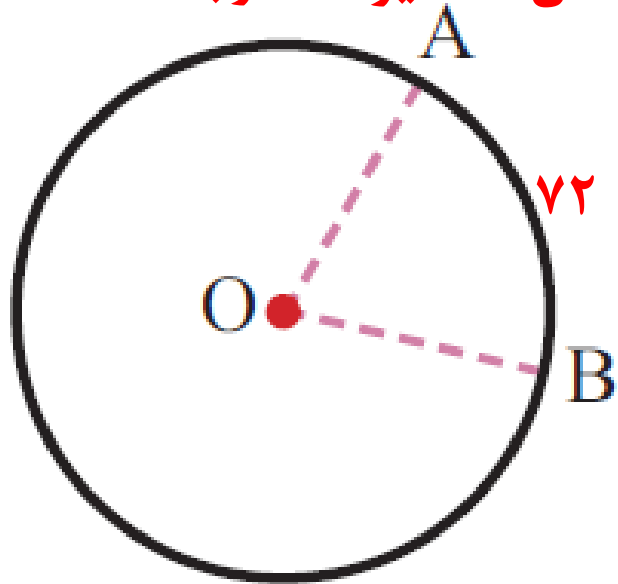
$$\text{کمان } AB = 2 \times 57 = 114$$

$$d = 114 \div 2 = 57$$

$$e = 114$$

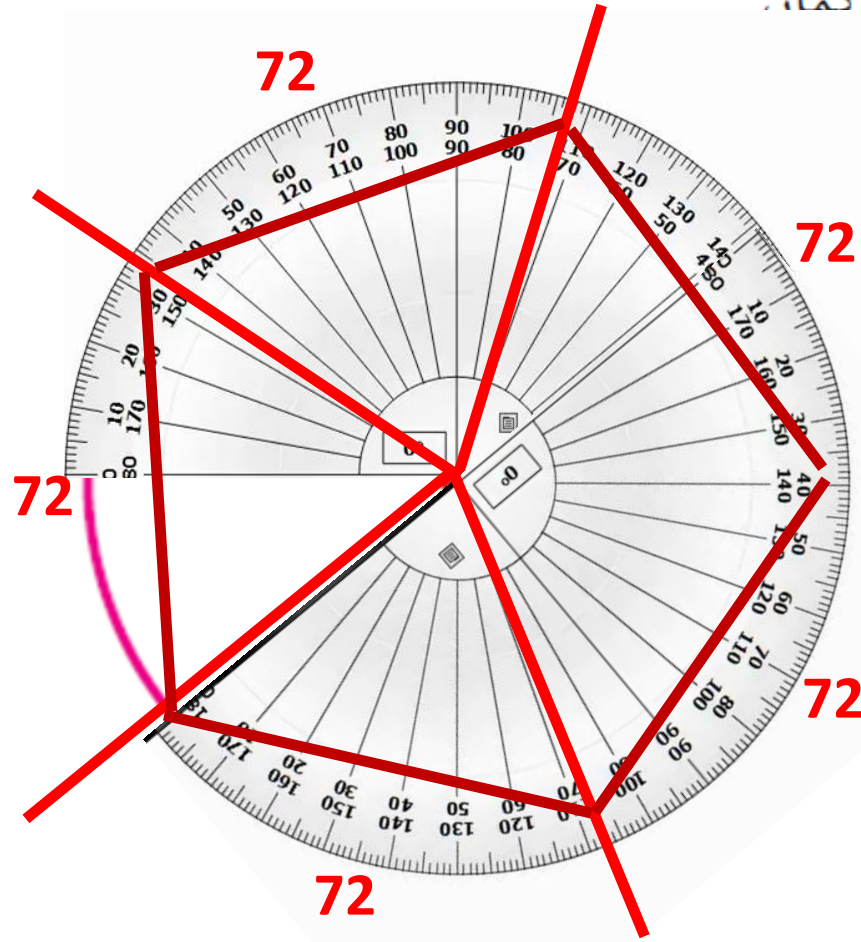
۲- در شکل زیر زاویه مرکزی AOB برابر با ۷۲ درجه است. اندازه کمان AB چند درجه

است؟ چون زاویه مرکزی است پس اندازه آن با کمان روبرویش برابر است. پس کمان AB نیز ۷۲ درجه است.



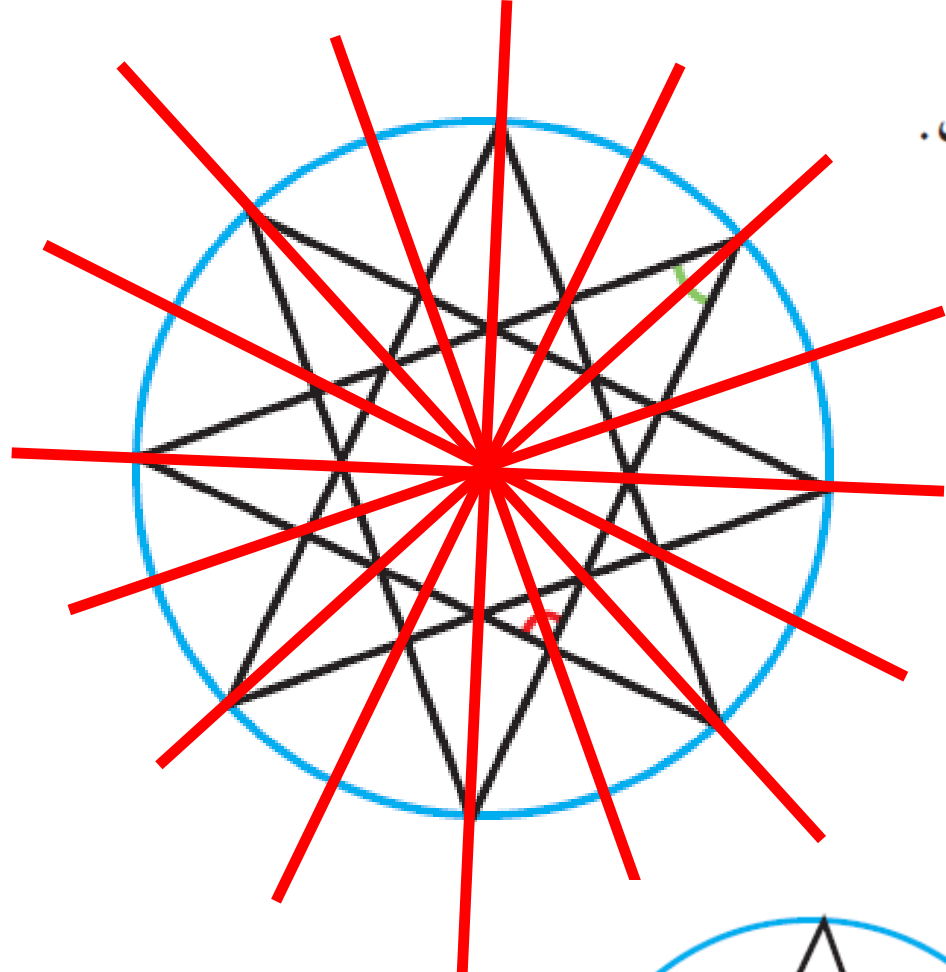
اگر، دهانه پرگار را به اندازه AB باز کنیم و با شروع از نقطه B، پی در پی کمان‌هایی بزنیم، چند کمان:

مساوی روی دایره جدا می‌شود؟



۵ کمان

۳- در شکل روبه‌رو، دایره‌ای به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است.



الف) شکل چند خط تقارن دارد؟

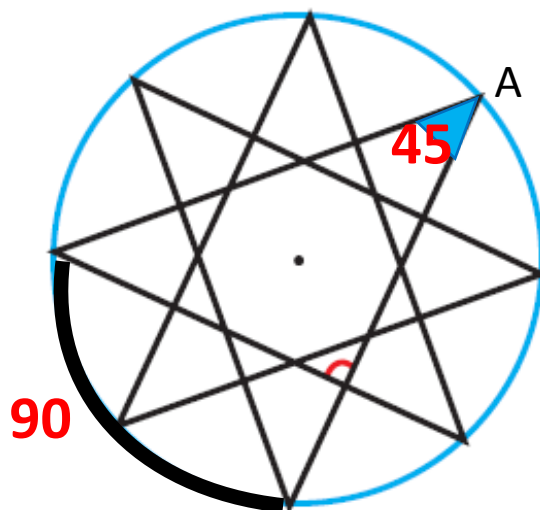
هشت خط تقارن دارد.

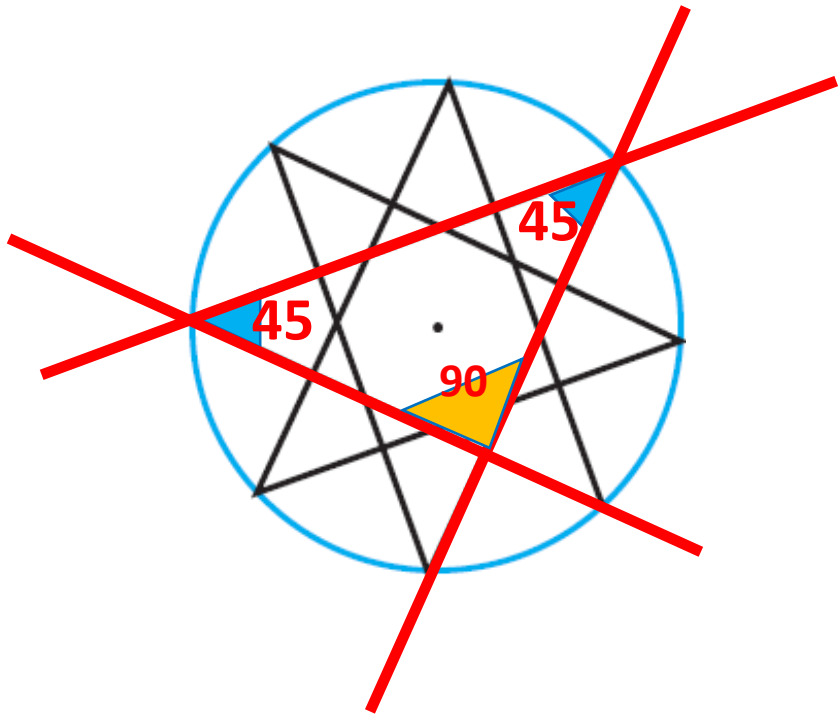
ب) اندازه دو زاویه مشخص شده را روی شکل پیدا کنید و بنویسید.

چون دایره به هشت کمان مساوی تقسیم شده است .  
پس اندازه هر کمان برابر است با :

$$360 \div 8 = 45$$

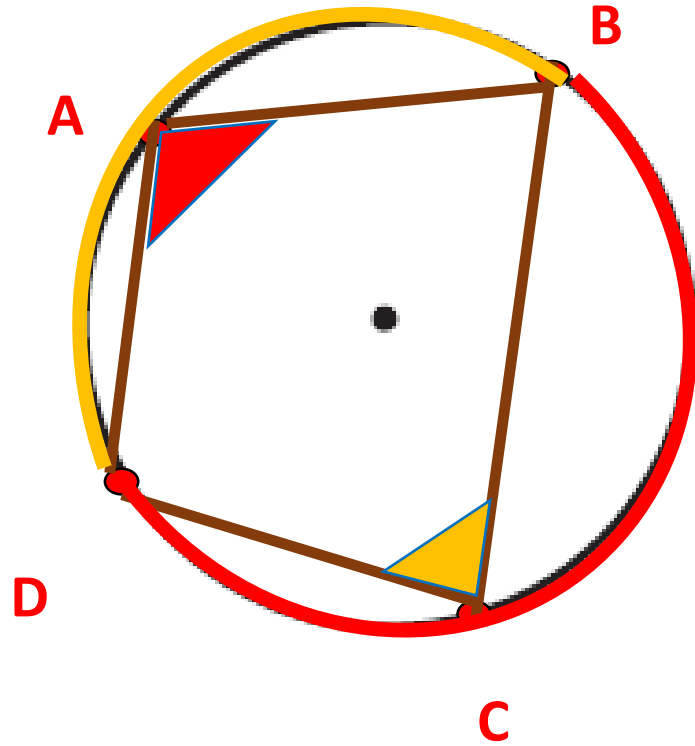
$$A = \frac{90}{2} = 45$$





$$180-(45+45)=90$$

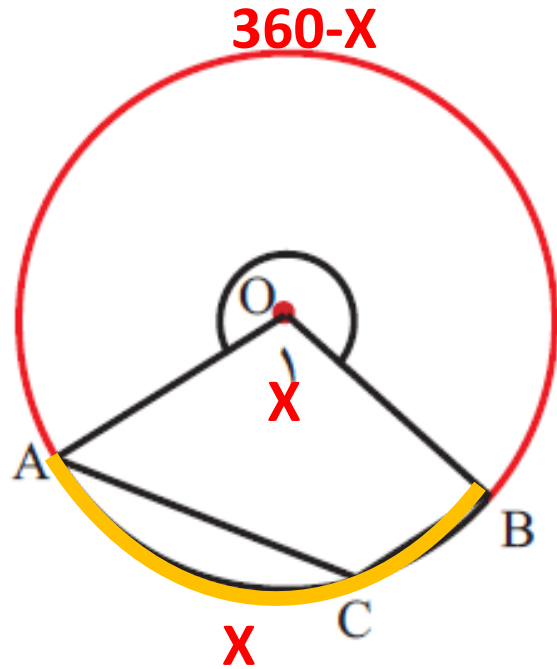
۴- دایره‌ای بکشید. سپس، چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.



چرا مجموع دو زاویه روبه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر  $180^\circ$  درجه است!

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{BD}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

۵- در شکل روبه‌رو اندازه کمان AB برابر x درجه است.



الف) اندازه زاویه  $O_1$  را بر حسب X بنویسید.

چون زاویه مرکزی است اندازه آن برابر X است.

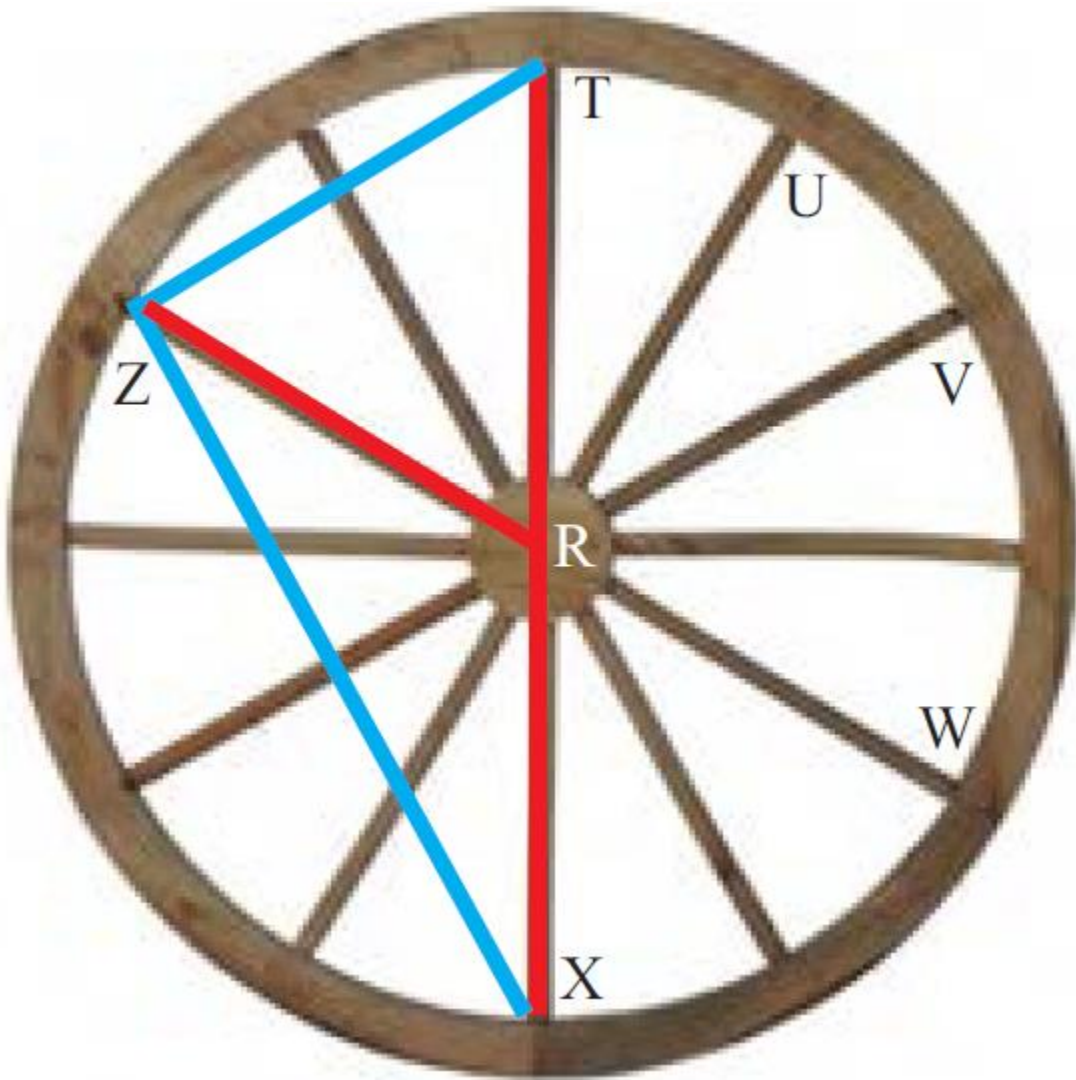
ب) اندازه کمان قرمز رنگ را بر حسب X بنویسید.

چون کل کمان یک دایره ۳۶۰ درجه است، پس کمان قرمز رنگ برابر  $360-X$  خواهد بود

ج) اندازه زاویه C را بر حسب X بنویسید.

$$\hat{C} = \frac{360 - X}{2}$$

۶- در شکل زیر، پره‌ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخ ایجاد کرده‌اند.  
شعاع چرخ ۳۰ سانتی‌متر است.



الف) طول TX چقدر است؟  $\overline{TX} = 2 \times 30 = 60 \text{ CM}$

ب) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟  
متساوی‌الاضلاع - چون اندازه هر زاویه آن ۶۰ درجه است.

ج) طول ZT چقدر است؟ ۶۰ سانتی‌متر

د) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟  
قائم‌الزاویه - زیرا زاویه Z برابر ۳۰ درجه  
و زاویه T برابر ۶۰ درجه است.

ه) طول ZX چقدر است؟

بنا بر رابطه فیثاغورث در مثلث ZTX داریم:

$$ZX^2 = TX^2 - ZT^2 = 60^2 - 30^2 = 3600 - 900 = 2700$$

$$ZX = \sqrt{2700} = \sqrt{3 \times 900} = 30\sqrt{3}$$