



۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳

۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷

۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱

۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵

۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹

۵۰

درس اول : چند ضلعی ها و تقارن

درس دوم : توازی و تعامد

درس سوم : چهار ضلعی ها

درس چهارم : زاویه های داخلی

درس پنجم : زاویه های خارجی

مرور فصل ۳

طی هزاران سال گذشته، در آثار هنری گوشه و کنار کشور پر افتخارمان، نقش مؤثر استفاده از هندسه و اشکال هندسی و نیز مفاهیم مهم هندسی همچون انتقال، تقارن و دوران به وضوح قابل مشاهده می‌باشد.



فعالیت

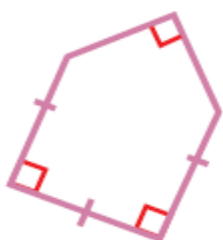


۱- در صفحه به هر خط شکسته بسته، چندضلعی گفته می‌شود به شرط آنکه ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند؛ مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند.

شکل «ج» چندضلعی نیست؛ چون ضلع‌های آن یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شکل «و» چندضلعی نیست. چرا؟ چون خط بسته نیست.

شکل «الف» هم چندضلعی نیست. چرا؟ چون خط شکسته نیست.



ز



و



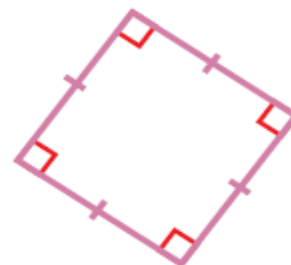
ه



د



ج



ب



الف

۲- اگر در یک چندضلعی همه ضلع‌ها با هم و همه زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چندضلعی منتظم است.

از میان شکل‌های بالا، کدام شکل‌ها چندضلعی منتظم‌اند؟ ب - ه

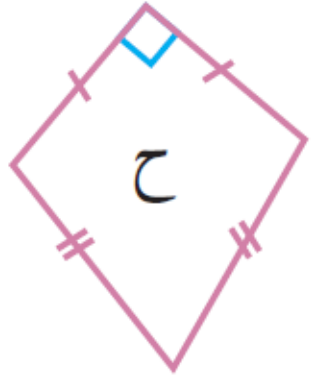
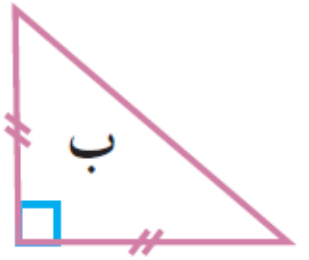
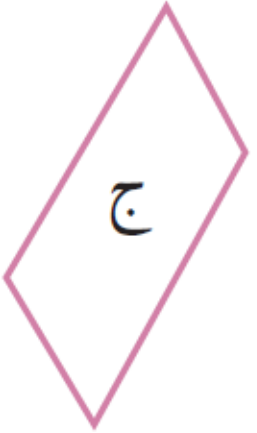
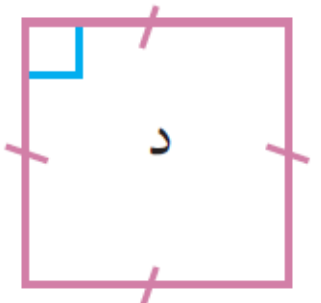
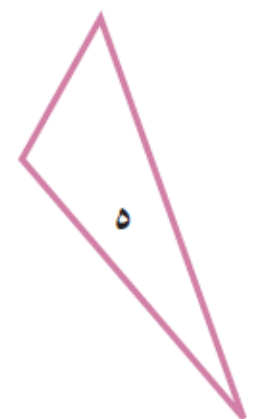
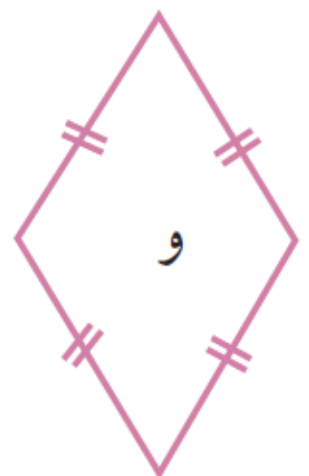
۳- یکی از شکل‌های بالا را انتخاب کنید. سپس، درباره تعداد ضلع‌ها، زاویه‌ها، تساوی آنها و... توضیح دهید تا دوستان شکلی را که انتخاب کرده‌اید، پیدا کند.

سپس به توضیحات دوستان گوش کنید و شکلی را که او انتخاب کرده است، پیدا کنید.

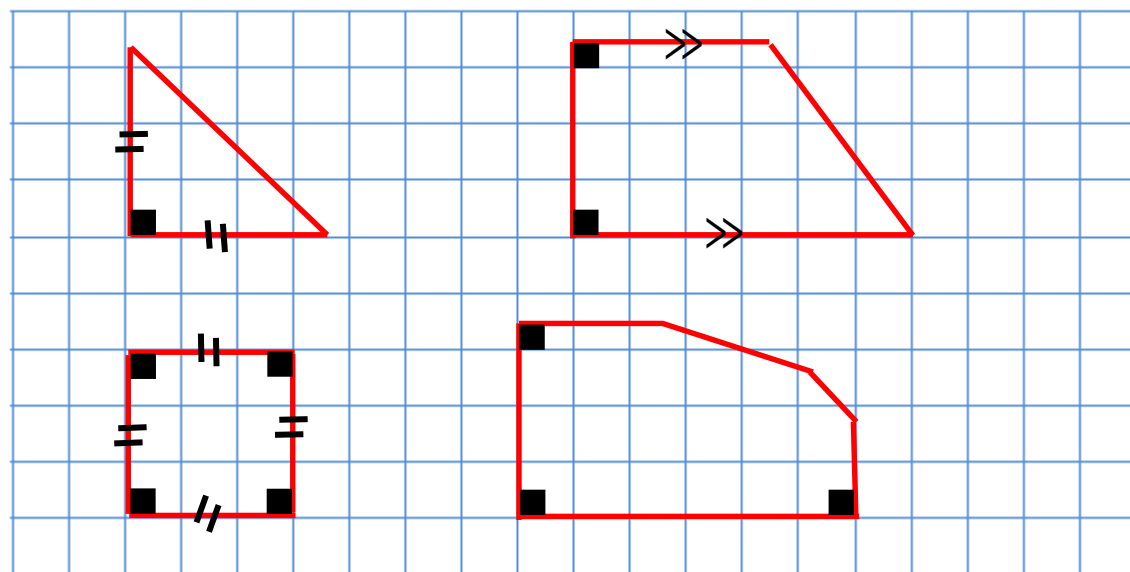


۱- هر یک از عبارتهای زیر مربوط به کدام چند ضلعیها است؟

- لوزی با زاویه قائمه د
- پنج ضلعی غیرمنتظم الف
- مثلث با زاویه باز ه
- چند ضلعی منتظم د



۲- چندضلعی‌های زیر را در صفحه شطرنجی رسم کنید.



الف) یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین

ب) مستطیلی با ضلع‌های مساوی

ج) یک دوزنقه قائم الزاویه

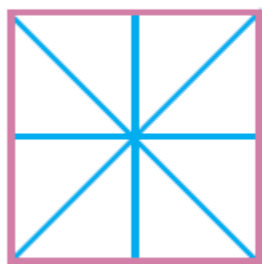
د) یک شش ضلعی با دقیقاً سه زاویه قائمه

۳- در سال گذشته با خط تقارن یک شکل آشنا شدید.

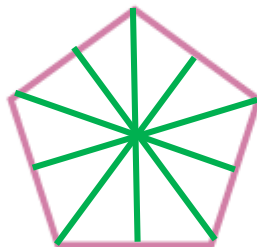
الف) تعداد خط‌های تقارن هر یک از چند ضلعی‌های منتظم زیر را پیدا کنید.



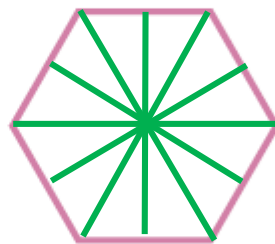
۳ خط تقارن



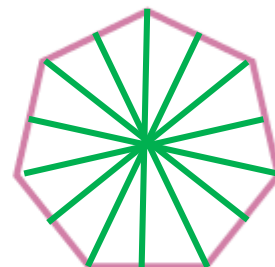
۴ خط تقارن



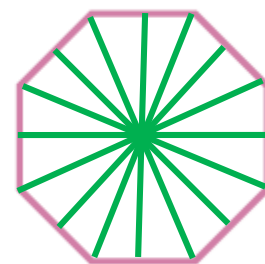
۵



۶



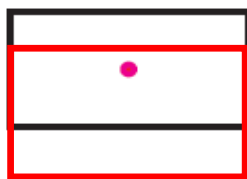
۷



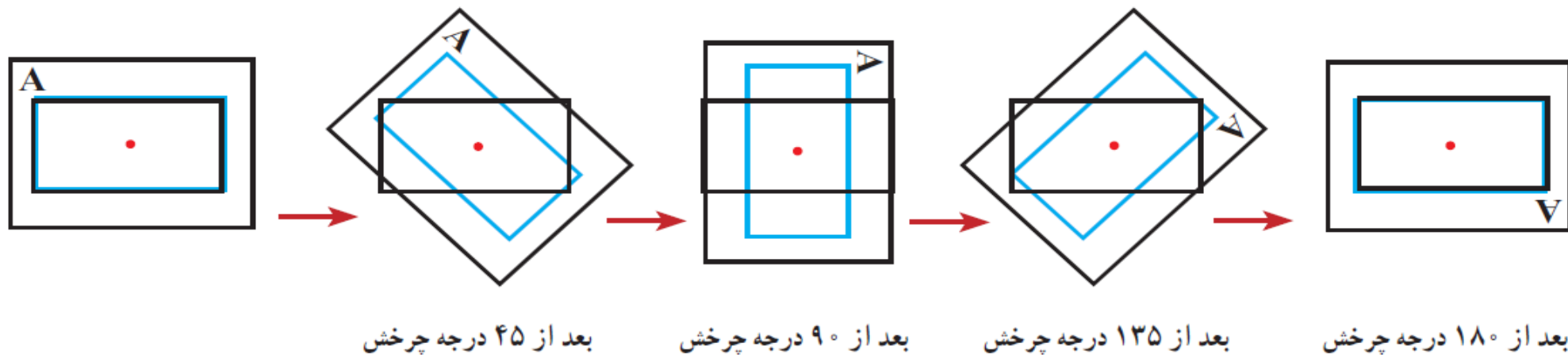
۸

ب) به نظر شما نه ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ ده ضلعی منتظم چگونه؟^۹

تعداد خط تقارن = تعداد اضلاع چند ضلعی



۱- یک ورق کاغذ پوستی روی مستطیل روبه‌رو قرار دهید و تصویر مستطیل را روی آن رسم کنید.
 نوک مدادتان را روی مرکز دوران بگذارید و مانند شکل‌های زیر، کاغذ پوستی را 180° درجه حول مرکز دوران بچرخانید.



آیا تصویر روی شکل منطبق می‌شود؟ بله

اگر شکلی را حول یک نقطه، 180° درجه دوران دهیم و نتیجه دوران روی خودش منطبق شود، می‌گوییم شکل **مرکز تقارن** دارد و نقطه مورد نظر، مرکز تقارن شکل است.

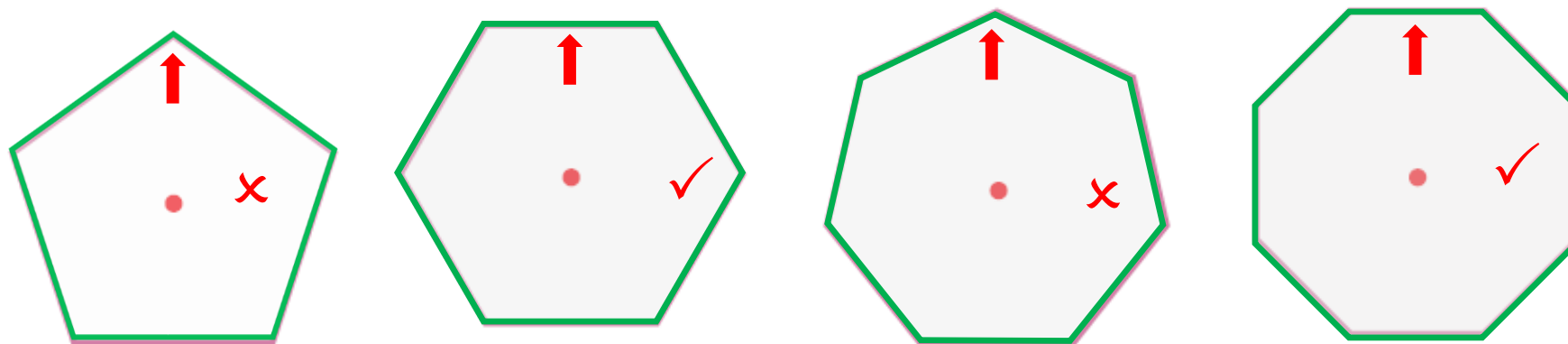


۲- شکل روبه‌رو مثلثی متساوی‌الاضلاع است. یک ورق کاغذ پوستی روی آن قرار دهید و مراحل فعالیت (۱) را تکرار کنید. آیا تصویر روی شکل منطبق می‌شود؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ نتیجه می‌گیریم نقطه مورد نظر، مرکز تقارن نیست.

نکته: اگر مثلث را 180° درجه دوران دهیم و بر خودش منطبق شود نقطه، مرکز تقارن است



۳- در کدام یک از چندضلعی‌های منتظم زیر، نقطه مشخص شده مرکز تقارن است؟

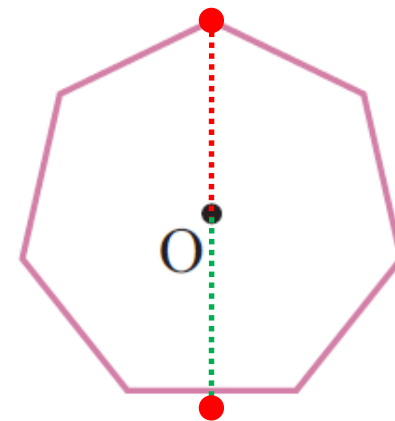
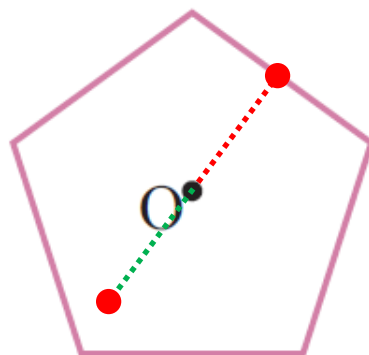
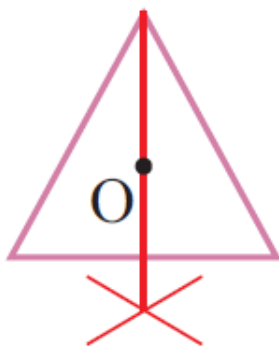


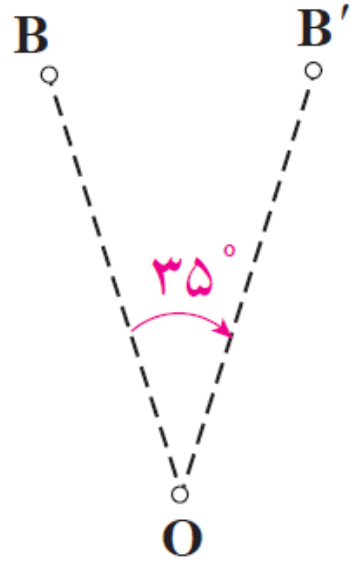
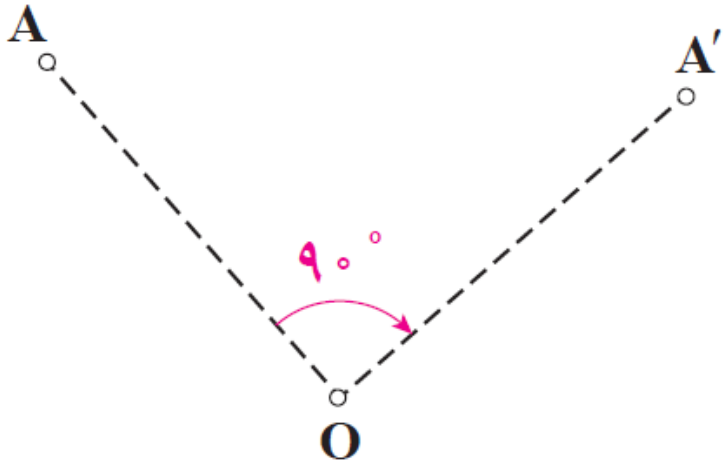
به نظر شما نه ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد؟ خیر

ده ضلعی منتظم چگونه از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

چند ضلعی‌های منتظم با اضلاع زوج، مرکز تقارن دارند

۴- یکی از راه‌های تشخیص اینکه نقطه O در مثلث متساوی‌الاضلاع مرکز تقارن نیست، این است که می‌توان روی شکل نقطه‌ای پیدا کرد که قرینه آن نسبت به نقطه O روی خود شکل قرار نگرفته باشد. مانند نمونه، نشان دهید که نقطه O در دو شکل دیگر هم، مرکز تقارن نیست.

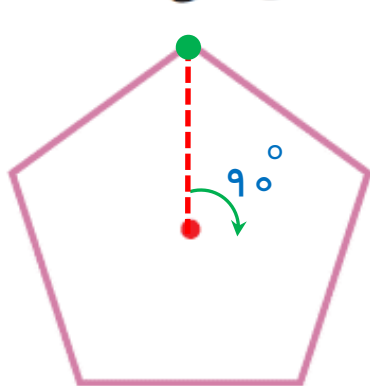




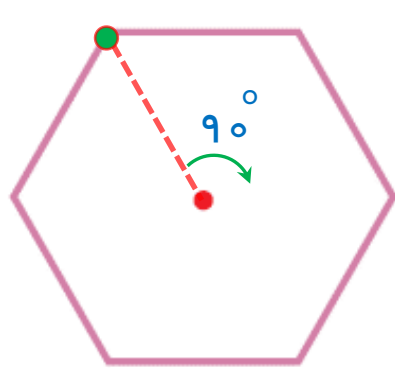
۵- شکل‌های مقابل چگونه پیدا کردن دوران یافته نقاط A و B حول مرکز O به اندازه 90° و 35° در جهت عقربه‌های ساعت را نشان می‌دهد.

کدام یک از شکل‌های فعالیت (۳) با

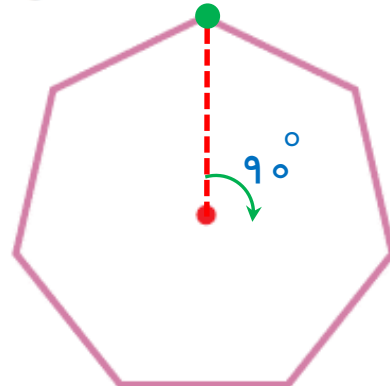
دوران 90° حول نقطه مشخص شده، در جهت عقربه‌های ساعت روی خودش می‌افتد؟



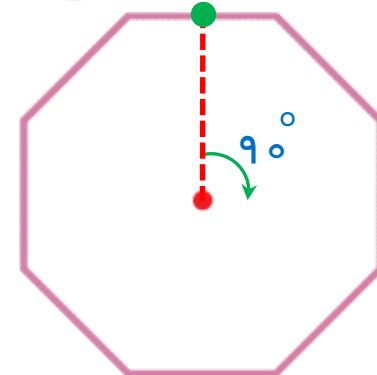
x



x

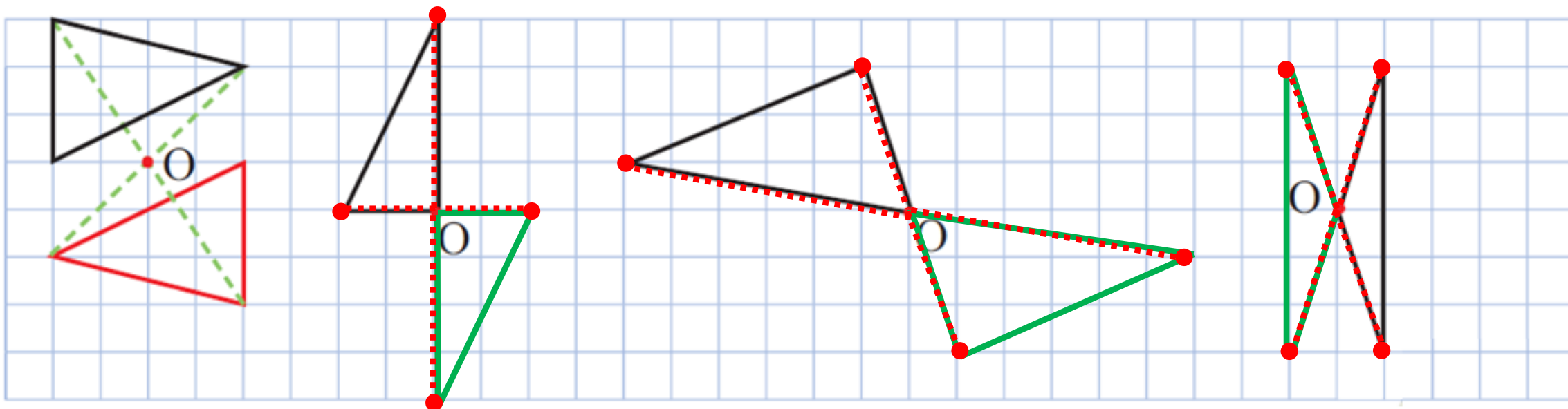


x

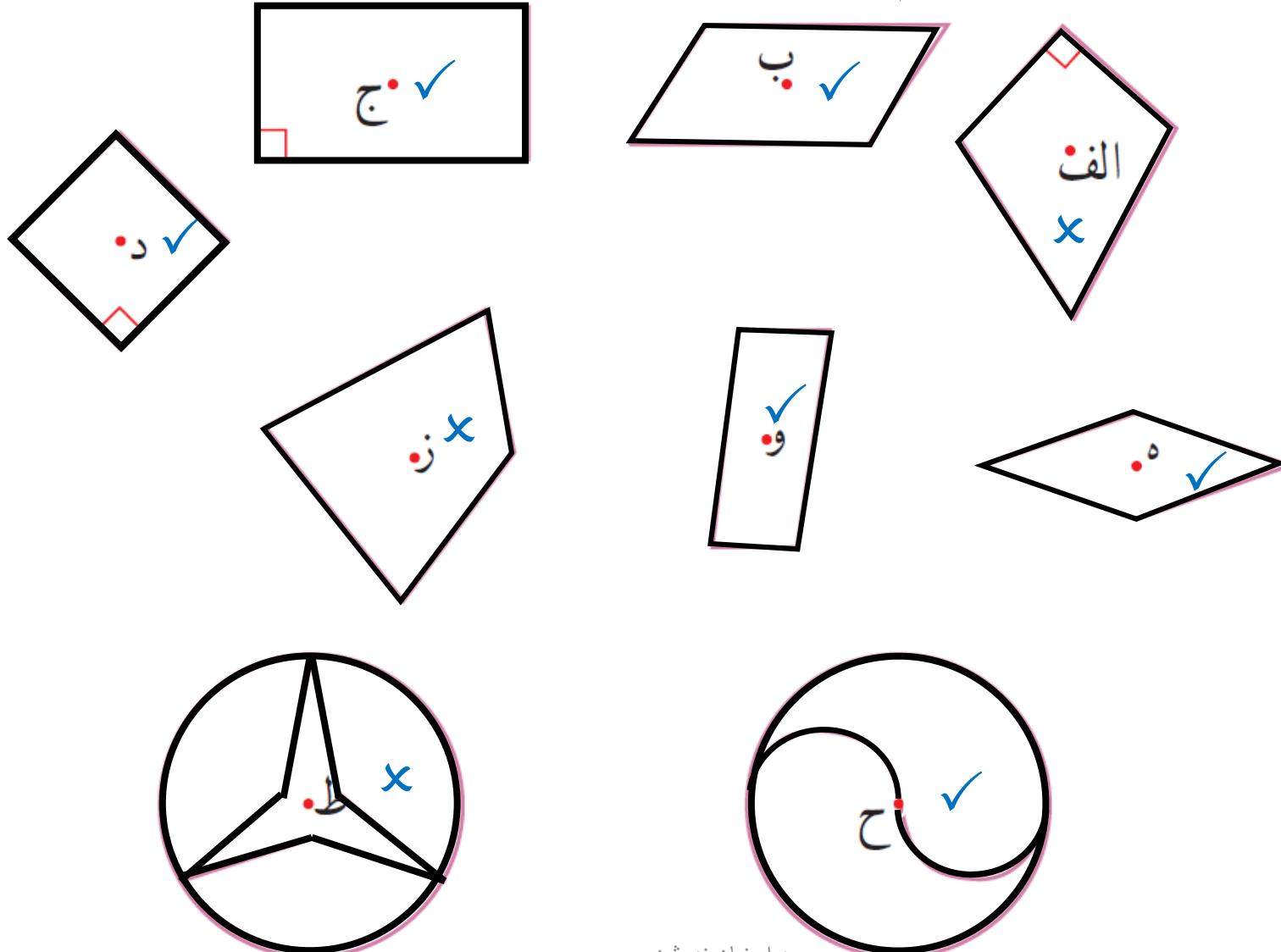


✓

مانند نمونه هر شکل را طوری کامل کنید که نقطه O مرکز تقارن باشد.

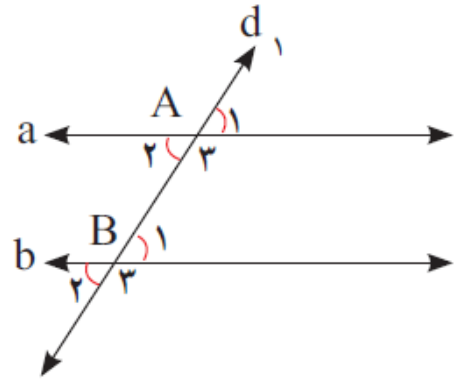


۲- در هر شکل، بررسی کنید که نقطه مشخص شده مرکز تقارن شکل هست یا نه.
نکته: اگر هر شکل را ۱۸۰ درجه دوران دهیم و بر خودش منطبق شود نقطه، مرکز تقارن است





اگر خطی مانند d_1 ، خطوط a و b را مانند شکل با زاویه‌های مساوی قطع کرده باشد، خط‌های a و b با هم موازیند.



به خط d_1 ، خط مورب می‌گویند.

موازی بودن خط‌های a و b را به صورت $a \parallel b$ نمایش می‌دهند. هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها زاویه‌های مساوی می‌سازد.

۱- اگر $\hat{A}_1 = 6^\circ$ باشد، زاویه‌های خواسته شده را

پیدا کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

چون مکمل زاویه A_1 است. $\hat{A}_3 = 120^\circ$

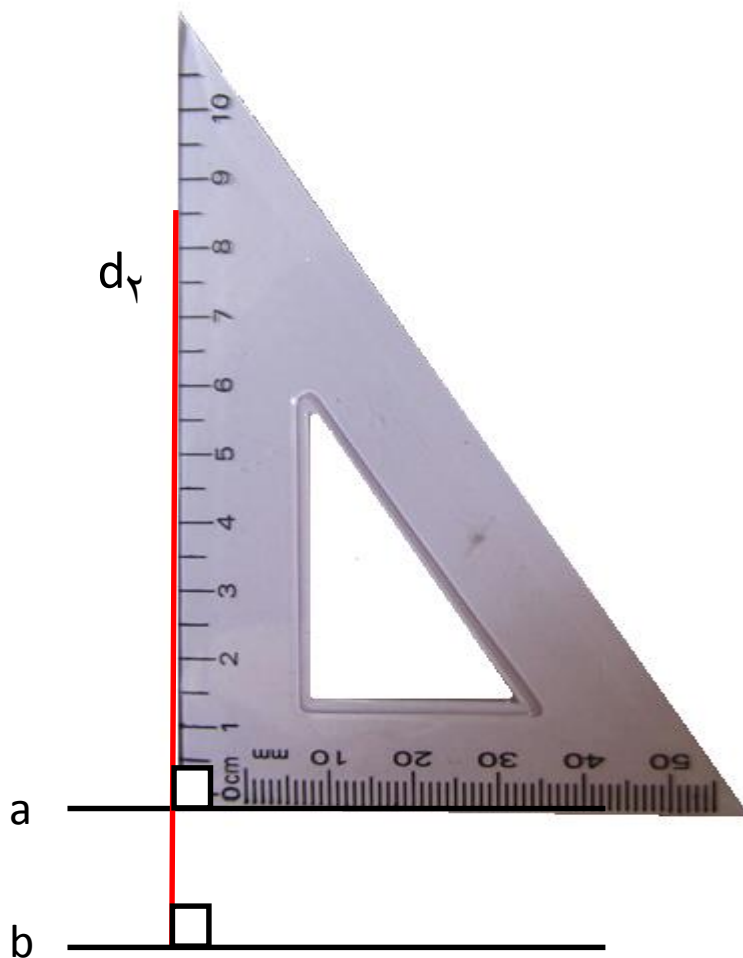
زیرا زاویه‌های تند با هم مساویند $\hat{B}_1 = 6^\circ$

چون با زاویه B_1 متقابل به رأس است. $\hat{B}_2 = 6^\circ$

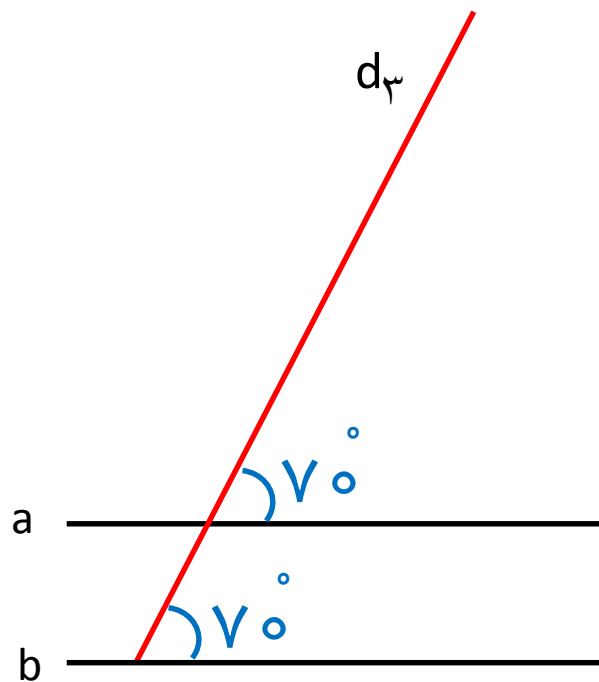
چون مکمل B_2 است $\hat{B}_3 = 120^\circ$

۲- خط d_2 را بر a عمود کنید و ادامه دهید تا خط b را قطع کند. چرا d_2 بر b هم عمود است؟

چون با یکی از دو خط موازی زاویه 90° درجه می سازد، با دیگری هم زاویه 90° درجه می سازد.

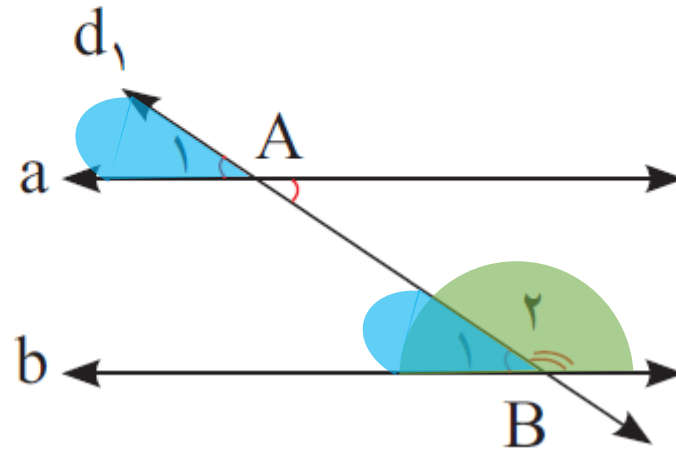


۳- خط d_3 با خط b زاویه 70° ساخته است. خط d_3 با خط a چه زاویه‌ای می‌سازد؟ 70 درجه



۴- دو خط a و b با هم موازی اند و خط d_1 مورب است. پس زاویه‌های A_1 و B_1 با هم مساوی اند. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$(a \parallel b \text{ و } d_1 \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$



چرا A_1 و B_2 مکمل اند؟

اگر خط a را روی صفحه انتقال دهیم تا روی خط b قرار گیرد و نقطه A روی B بیفتد، زاویه A_1 روی

کدام زاویه قرار می‌گیرد؟ B_1

چگونه از این طریق می‌توان توجیه کرد که زاویه A_1 و زاویه B_2 مکمل یکدیگرند؟ توضیح دهید.

$$\textcircled{1} A_1 = B_1$$

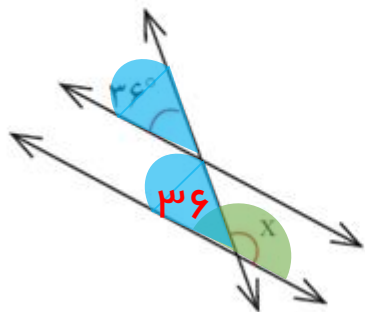
$$\textcircled{2} B_1 + B_2 = 180^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} A_1 = B_1 \\ \textcircled{2} B_1 + B_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 + B_2 = 180^\circ$$

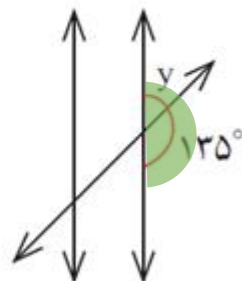
اگر در رابطه $\textcircled{2}$ به جای B_1 ، A_1 را قرار دهیم، خواهیم داشت:

۱- در هر شکل یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کرده است. اندازه زاویه‌های

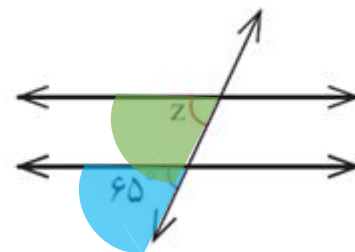
مجهول را به دست آورید.



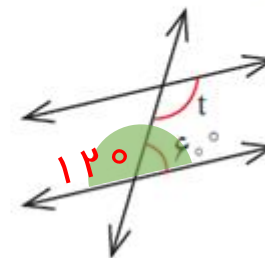
$$x = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$



$$y = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$



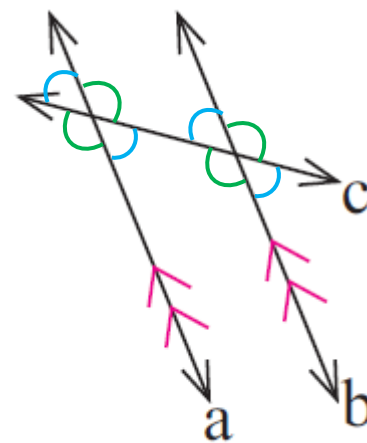
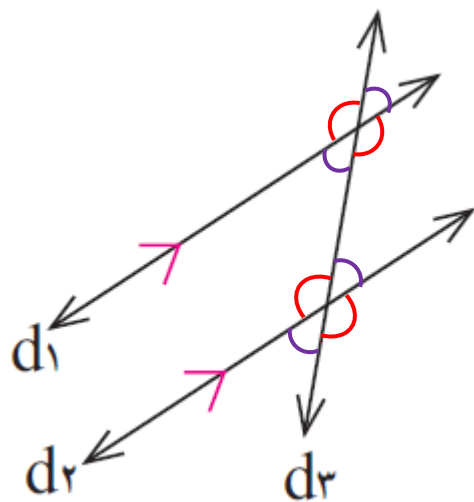
$$z = 65^\circ$$



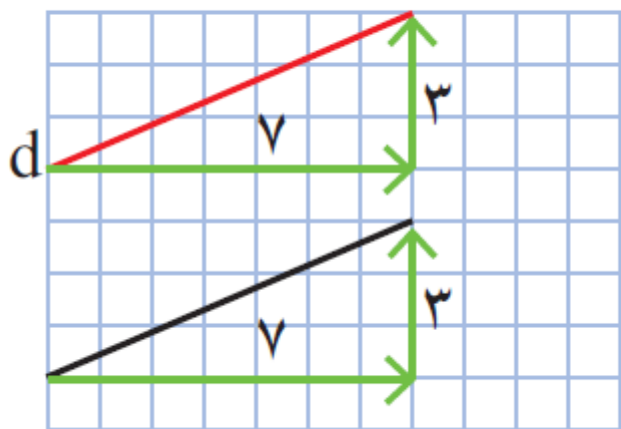
$$t = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

۲- موازی بودن دو خط را مانند شکل، با علامت گذاری آنها مشخص می‌کنیم. عبارت «خط d_1 با خط d_3 موازی نیست» را به صورت $d_1 \not\parallel d_3$ می‌نویسیم.

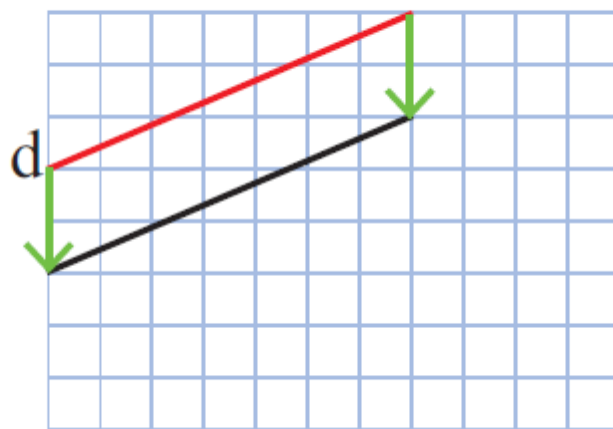
الف) عبارت‌های $a \parallel b$ و $a \not\parallel c$ را بخوانید. خط a با خط b موازی است
خط a با خط c موازی نیست
ب) زاویه‌های مساوی را در شکل‌ها با علامت گذاری مشخص کنید.



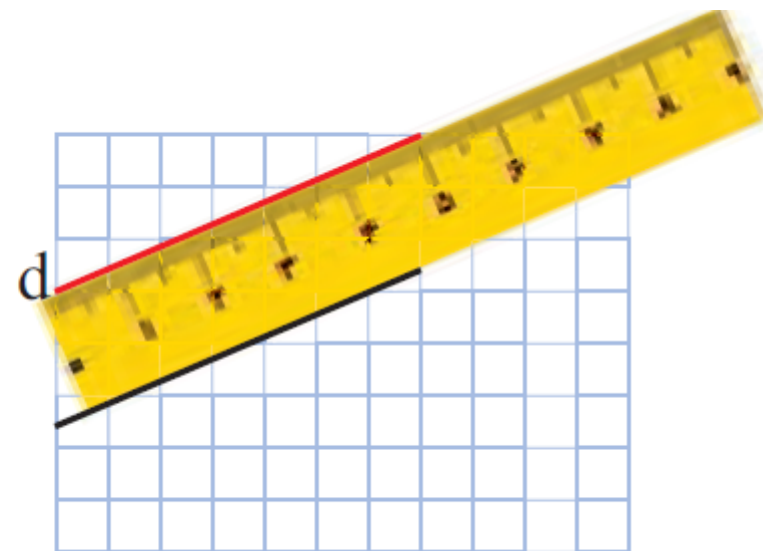
۱- می‌خواهیم در صفحه شطرنجی خطی موازی خط d رسم کنیم. راه حل سه دانش‌آموز را مشاهده کنید و توضیح دهید هر کدام از آنها چگونه خط موازی را رسم کرده است.



با استفاده از طول بردار



با انتقال

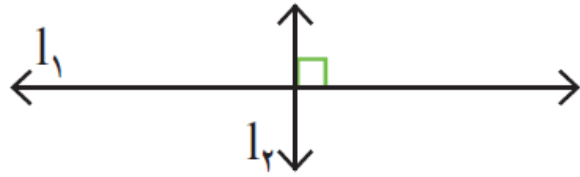


با خط کش



۲- عمود بودن دو خط را با علامت گذاری آنها مشخص می‌کنیم و عبارت «خط l_1 بر خط l_2

عمود است» را به صورت $l_1 \perp l_2$ می‌نویسیم.



الف

$\left. \begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow b \parallel c$

دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند

مانند نمونه، برای هر کدام شکل بکشید و جاهای خالی را پر کنید.

ج

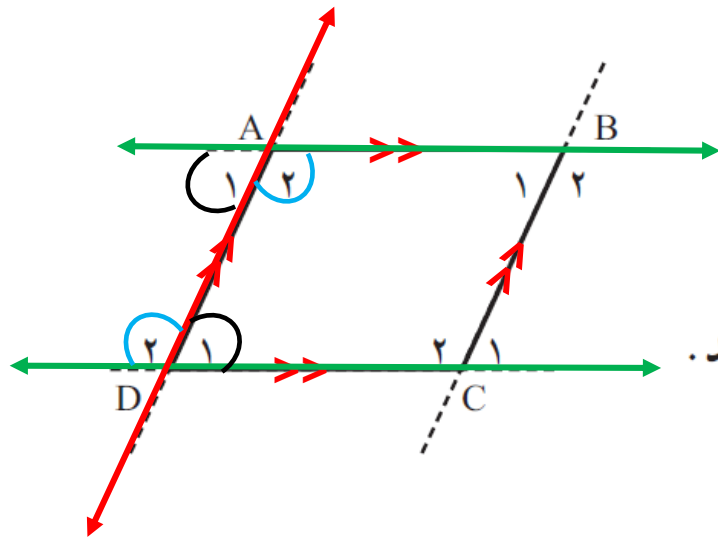
$\left. \begin{array}{l} d \parallel e \\ d \parallel f \end{array} \right\} \Rightarrow e \parallel f$

دو خط موازی با یک خط با هم موازیند

ب

$\left. \begin{array}{l} g \parallel h \\ k \perp h \end{array} \right\} \Rightarrow k \perp g$

اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود بر دیگری هم عمود است

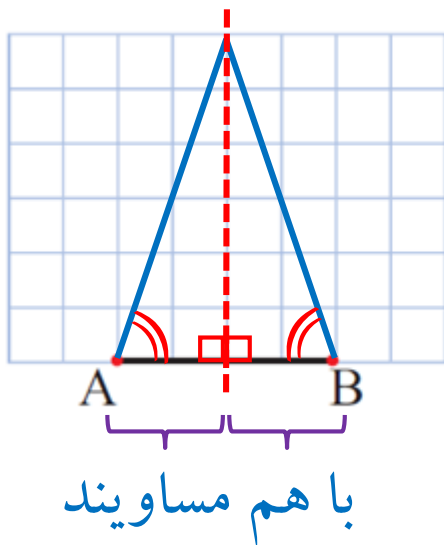


۳- در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو باهم موازی‌اند. چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع است.
 الف) ضلع‌های موازی را با علامت گذاری مشخص کنید.
 ب) در رابطه‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید.

➔ $(AD \parallel BC \text{ و } AB \parallel DC) \Rightarrow A_1 = B_1 \text{ و } A_2 = B_2$ (مورب AB و AD||BC) $\Rightarrow D_1 = C_1 \text{ و } D_2 = C_2$ (مورب DC و AD||BC)

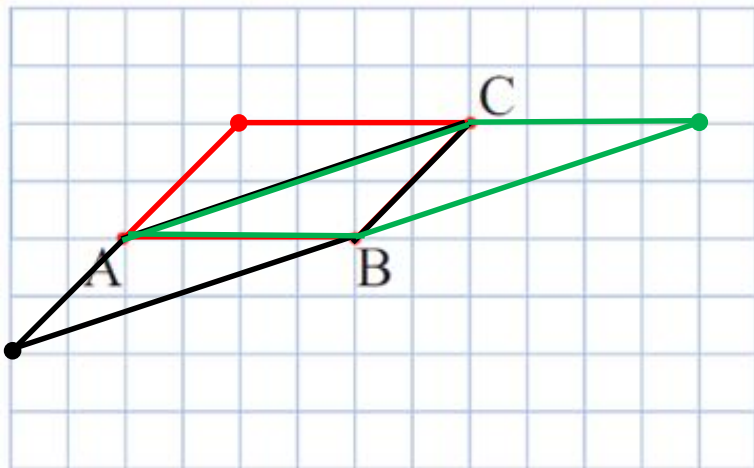
$(AD \parallel BC \text{ و } AB \parallel DC) \Rightarrow B_1 = C_1 \text{ و } B_2 = C_2$ (مورب BC و AB||DC) $\Rightarrow A_1 = D_1 \text{ و } A_2 = D_2$ (مورب AD و AB||DC)





- (الف) یک مثلث متساوی الساقین بکشید؛ طوری که پاره خط AB قاعده آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.
- (ب) خط تقارن مثلث را رسم کنید.
- (ج) آیا دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند؟ بله
- (د) آیا خط تقارن، عمود منصف قاعده و نیمساز زاویه مقابل آن است؟ بله

نکته: وقتی شکل را از روی خط تقارن تا کنیم تمام زاویه‌ها و ضلع‌ها دو به دو بر هم منطبق می‌شوند، یعنی با هم مساویند



۲- متوازی الاضلاعی رسم کنید که نقاط A، B و C سه تا از رأس‌های آن باشند.

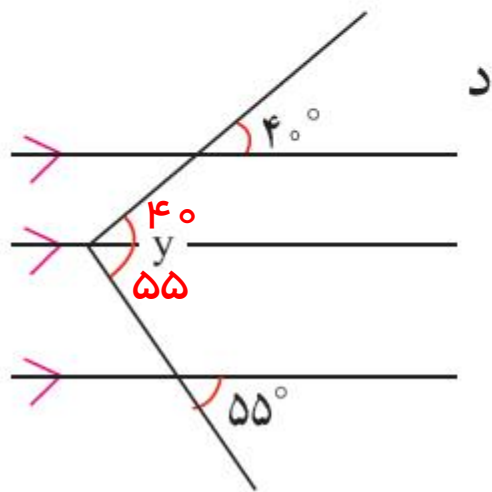
پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.

برای این سؤال چند پاسخ مختلف می‌توانید پیدا کنید؟ سه تا

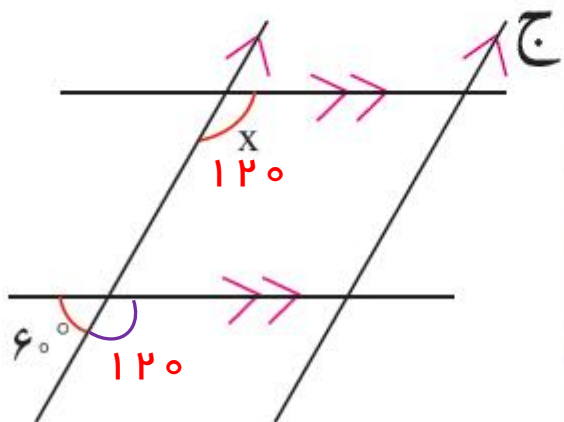
تمرین



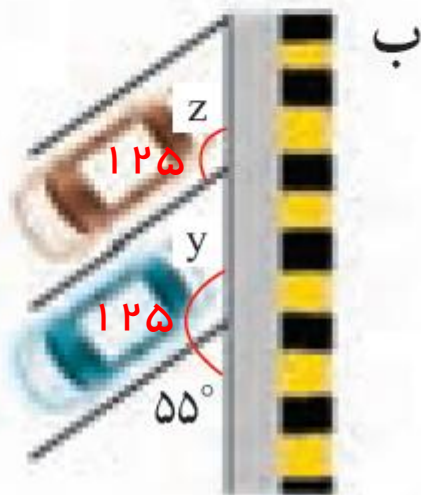
۱- در هر قسمت، اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



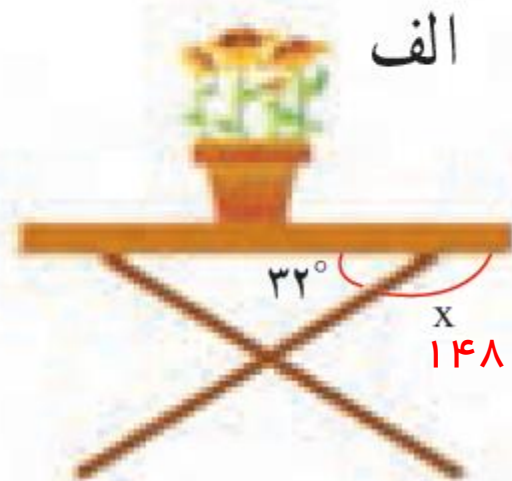
$y = 95^\circ$



$x = 120^\circ$



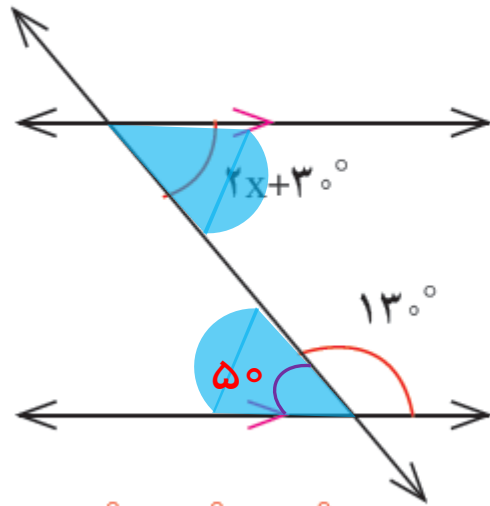
$y = 125^\circ$
 $z = 125^\circ$



$x = 148^\circ$



۲- مانند نمونه، با تشکیل معادله، مقدار x را پیدا کنید.



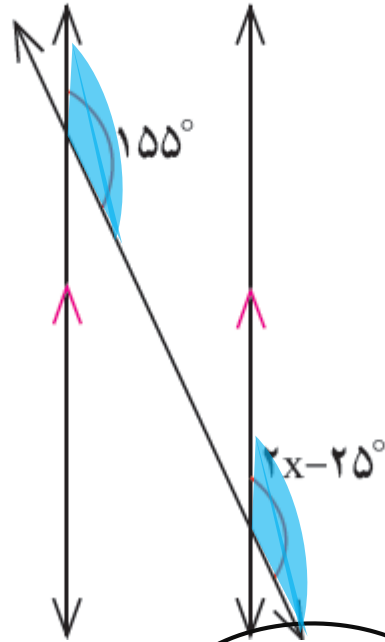
$$2x + 3^\circ + 13^\circ = 180^\circ$$

$$2x + 3^\circ = 5^\circ$$

$$2x = 5^\circ - 3^\circ$$

$$2x = 2^\circ$$

$$x = \frac{2^\circ}{2} = 1^\circ$$

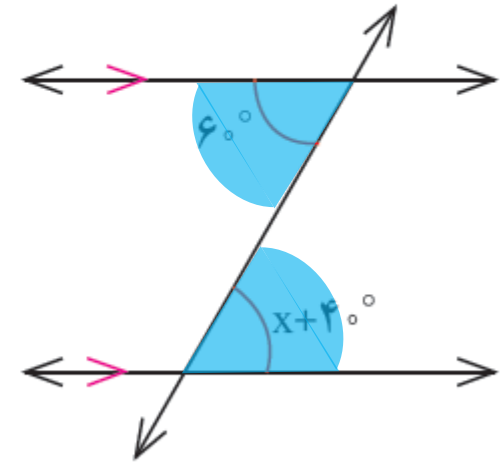


$$2x - 25 = 155$$

$$2x = 155 + 25$$

$$2x = 180$$

$$x = \frac{180}{2} = 90$$

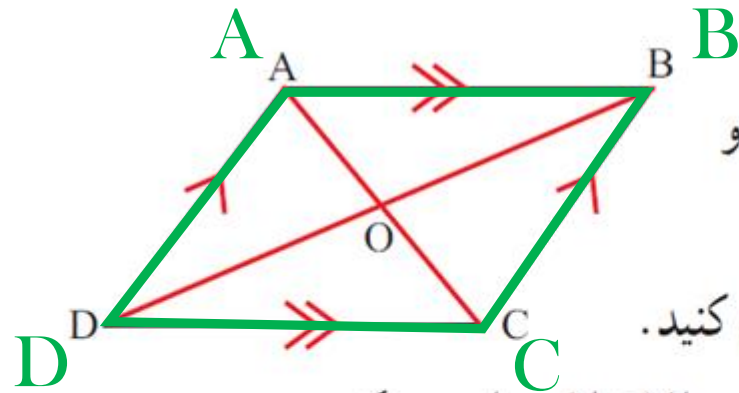


$$x + 4^\circ = 6^\circ$$

$$x = 6^\circ - 4^\circ$$

$$x = 2^\circ$$





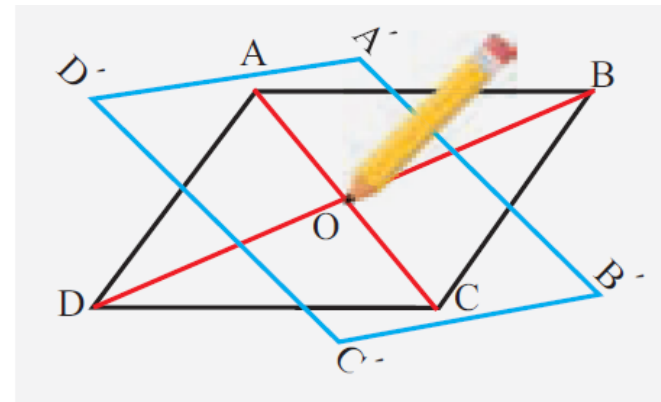
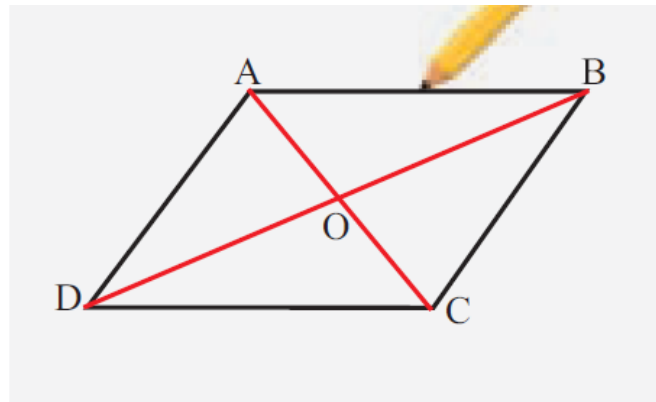
چهارضلعی‌ای که ضلع‌های روبه‌روی آن دو به دو با هم موازی‌اند، متوازی‌الاضلاع نام دارد.

۱- متوازی‌الاضلاع را رسم و مانند شکل نام‌گذاری کنید.

یک ورق کاغذ پوستی روی آن بگذارید و تصویر متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

نوک مدادتان را روی نقطه O (محل برخورد قطرهای و مرکز تقارن شکل) قرار دهید و مانند

شکل‌های زیر تصویر را 180° درجه حول این نقطه بچرخانید تا بر شکل منطبق شود.



۲- با توجه به انطباق شکل و تصویر، تساوی‌ها را کامل کنید.

$$\hat{A} = \underline{C}$$

$$\hat{B} = \underline{D}$$

$$\overline{AB} = \underline{CD}$$

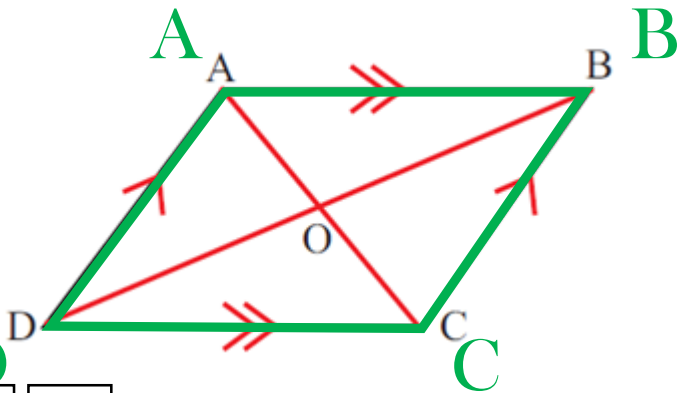
$$\overline{BC} = \underline{AD}$$

هر یک از عبارت‌های زیر، یکی از خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع را بیان می‌کند. با توجه به تساوی‌های بالا، این دو عبارت را کامل کنید.

در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های رو به رو مساویند

در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های رو به رو مساویند

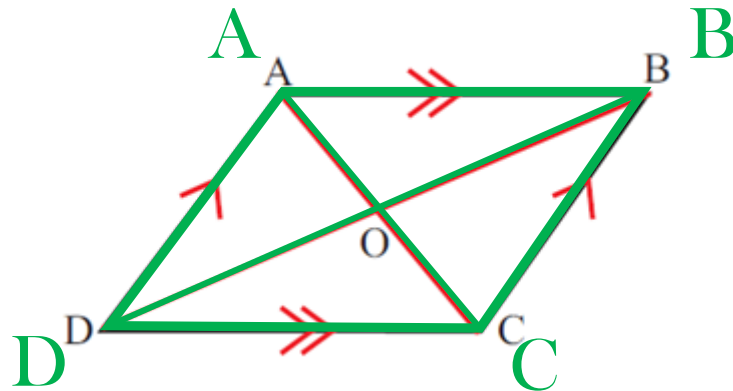
در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور مکملند



۳- پاره خط OA بر کدام پاره خط منطبق شده است؟ OC

پاره خط OB چطور؟ OD

با توجه به پاسخ این دو پرسش، یک خاصیت دیگر متوازی الاضلاع را پیدا کنید و بنویسید.
در هر متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می کنند.



کار در کلاس



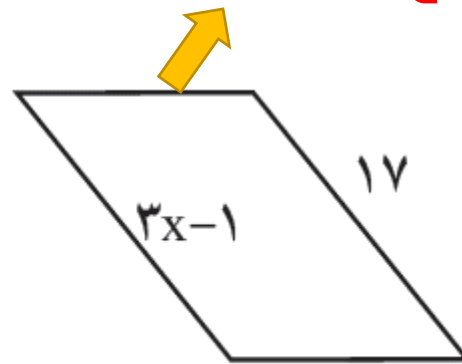
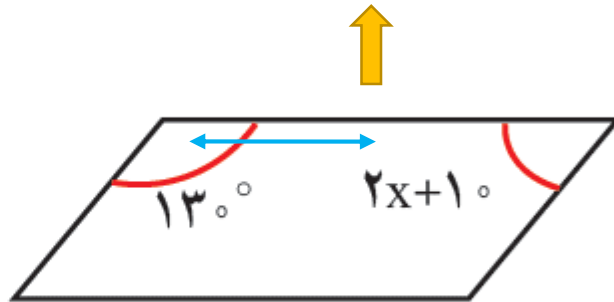
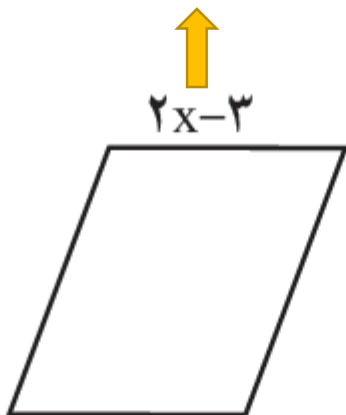
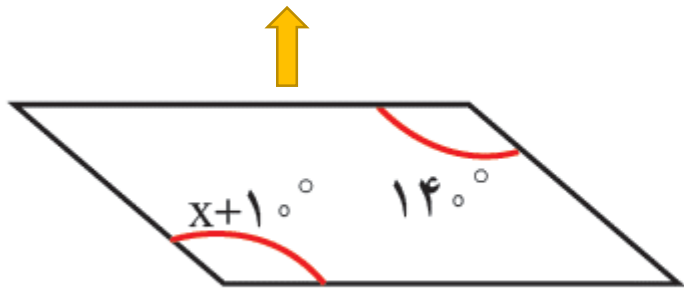
اضلاع روبرو با هم برابرند

۱- شکل‌های زیر متوازی‌الاضلاع‌اند. با تشکیل معادله، مقدار x را به دست آورید.

اضلاع روبرو با هم برابرند

زاویه‌های مجاور مکملند

زاویه‌های روبرو با هم برابرند



$$x + 10 = 140$$

$$x = 140 - 10$$

$$x = 130$$

$$2x - 3 = 7$$

$$2x = 7 + 3$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

$$2x + 10 + 130 = 180$$

$$2x = 180 - 10 - 130$$

$$2x = 40$$

$$x = \frac{40}{2} = 20$$

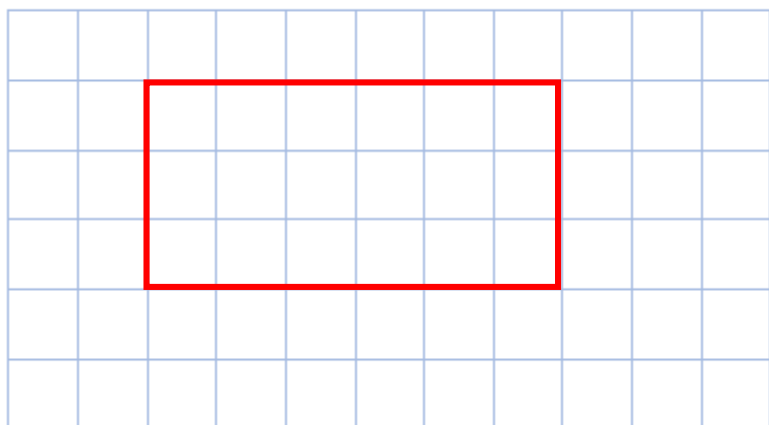
$$3x - 1 = 17$$

$$3x = 17 + 1$$

$$3x = 18$$

$$x = \frac{18}{3} = 6$$





۲- در صفحه شطرنجی متوازی الاضلاعی رسم کنید که یکی از زاویه‌هایش قائمه (90° درجه) باشد. چرا زاویه‌های دیگر آن هم حتماً قائمه‌اند؟ توضیح دهید.

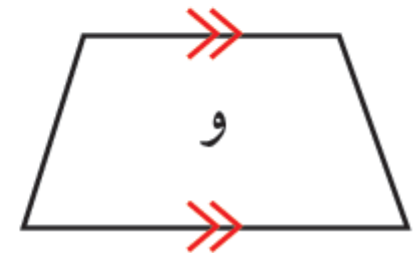
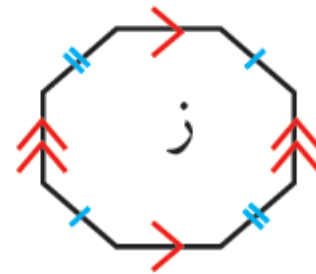
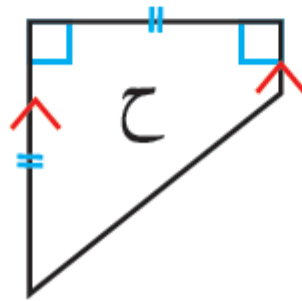
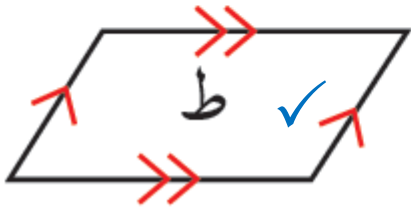
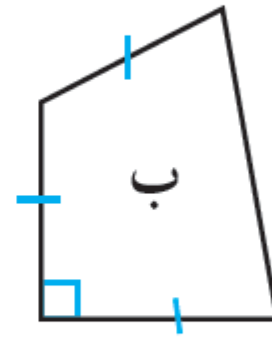
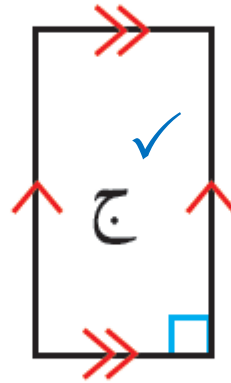
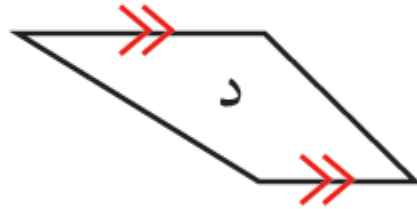
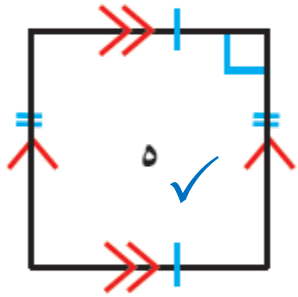
چون در متوازی الاضلاع باید زاویه‌های روبه‌رو مساوی و زاویه‌های مجاور مکمل باشند.

فعّالیت



۱- با توجه به تعریف متوازی الاضلاع، کدام یک از شکل های زیر متوازی الاضلاع

است؟



۲- در اینجا چند چهارضلعی دیگر هم تعریف شده‌اند. هر تعریف را بخوانید و از میان چهارضلعی‌های فعالیت قبل، مثال‌هایی برای هر یک پیدا کنید.

• مستطیل متوازی الاضلاعی است که زاویه‌های قائمه دارد. ج ، ه

• لوزی متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند. ه ، الف

• مربع متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زاویه‌های قائمه دارد. ه

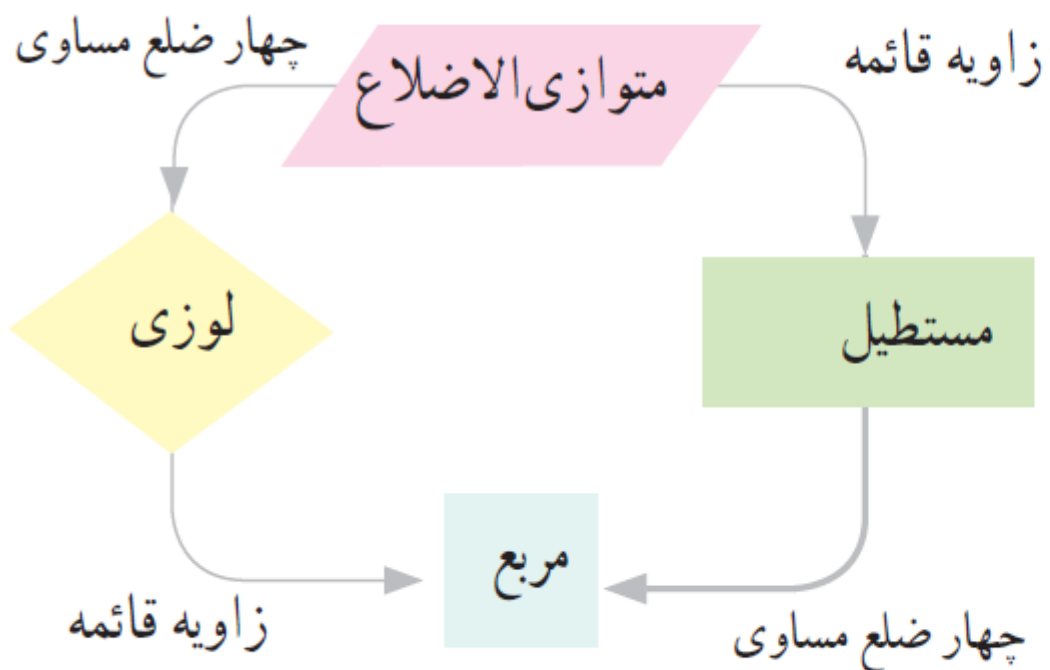


۳- می دانیم که «در هر متوازی الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می کنند.»
آیا می توانیم نتیجه بگیریم که «در هر لوزی هم قطرهای یکدیگر را نصف می کنند»؟ چرا؟
بله؛ چون هر لوزی، متوازی الاضلاع است.



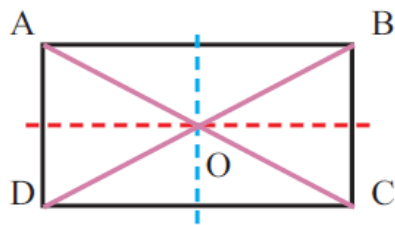


۱- با توجه به نمودار رو به رو، در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

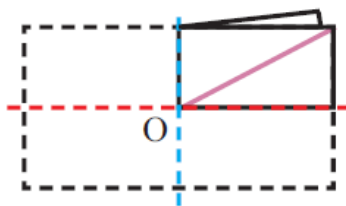
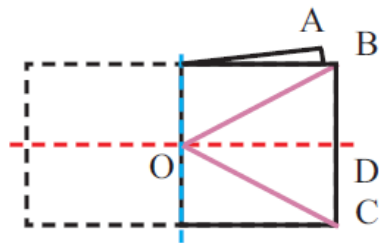


متوازی الاضلاع	لوزی	مستطیل	مربع	
✓	✓	✓	✓	
✓	×	✓	×	
✓	✓	×	×	
✓	—	—	—	





۲- روی یک ورق کاغذ، مستطیلی به دلخواه رسم کنید و دور آن را ببرید. مستطیل را مانند شکل نام گذاری کنید. سپس آن را ابتدا روی یکی از خط‌های تقارن و سپس روی خط تقارن دیگر تا کنید.



مانند نمونه، توضیح دهید که شکل به دست آمده چگونه هر یک از خاصیت‌های مستطیل را نشان

می‌دهد. ● در مستطیل قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند؛ چون OA روی OC و OB روی OD قرار گرفته

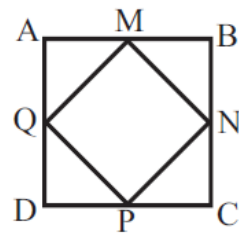
است.

الف) در مستطیل همه زاویه‌ها با هم برابرند؛ چون روی هم قرار می‌گیرند.

ب) در مستطیل ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند، چون هر ضلع بر ضلع مقابلش منطبق می‌شود

ج) در مستطیل قطرهای با هم برابرند؛ چون نصف هر قطر بر نصف قطر دیگر منطبق می‌شود





۳- در یک طرح کاشی کاری، مربع ABCD دیده می شود. چهار ضلعی MNPQ هم با وصل شدن وسط ضلع های این مربع تشکیل شده است.

دو دانش آموز توضیح داده اند که MNPQ چه نوع چهار ضلعی ای است. نظر این دو دانش آموز در اینجا آمده است.

هادی

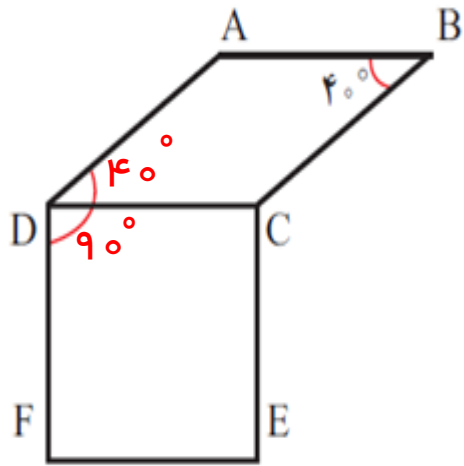
ABCD مربع است. این مربع را روی دو قطر آن، که محور تقارن نیز هستند، تا می کنیم. همه زاویه های چهار ضلعی MNPQ روی هم می افتند. پس با هم برابرند. چون مجموع آنها 360° است، پس هر کدام 90° می شوند. در نتیجه این چهار ضلعی مستطیل است.

مبین

ABCD مربع است. این مربع را روی دو خط تقارنی، که موازی ضلع های آن هستند، تا می کنیم. همه ضلع های چهار ضلعی MNPQ روی هم می افتند. پس، این چهار ضلعی لوزی است.

دلایل هر دو را بخوانید و توضیح دهید که چگونه به کمک این دو نوشته می توانیم نتیجه بگیریم که MNPQ مربع است. چهار ضلعی که ضلع های مساوی و زاویه های 90° درجه دارد، مربع است.





۱- چهار ضلعی ABCD لوزی و چهار ضلعی DCEF مربع است.

$$\left. \begin{array}{l} AD = DC \\ DC = CE \end{array} \right\} \longrightarrow AD = CE \quad \text{الف) چرا } \overline{AD} = \overline{CE} ?$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DC \\ DC \parallel EF \end{array} \right\} \longrightarrow AB \parallel EF \quad \text{ب) چرا } AB \parallel EF ?$$

ج) زاویه ADF چند درجه است؟ $90 + 40 = 130$



۲- روی کاغذ، لوزی دلخواهی بکشید و دور آن را ببرید.

این لوزی کاغذی را روی دو خط تقارنش تا کنید. به کمک شکل به دست آمده چه نتایجی در مورد قطرهای لوزی به دست می آید.

قطرهای لوزی بر هم عمودند چون 4 زاویه که جمعشان 360 درجه است، روی هم قرار می گیرند.



۳- وسط ضلع‌های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی به دست آمده چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

لوزی، چون اگر مستطیل را روی خطهای تقارنش تا کنیم ضلع‌های این چهارضلعی روی هم منطبق می‌شوند.



۴- درستی یا نادرستی هریک از جمله‌های زیر را بررسی کنید.

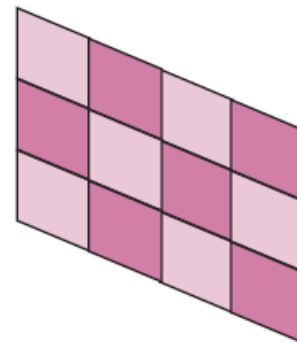
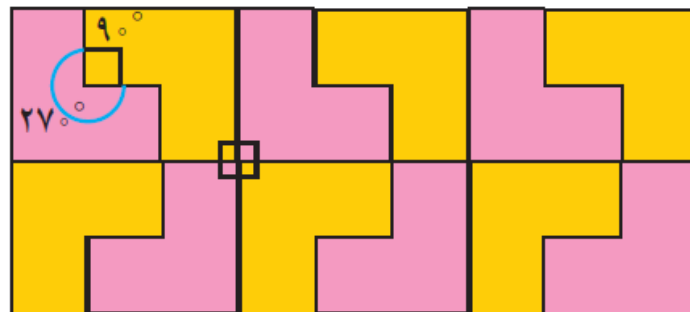
- الف) قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند. ✓
- ب) قطرهای هر لوزی با هم مساوی‌اند. ✗
- ج) قطرهای هر مستطیل بر هم عمودند. ✗
- د) قطرهای هر لوزی بر هم عمودند. ✓



فعالیت

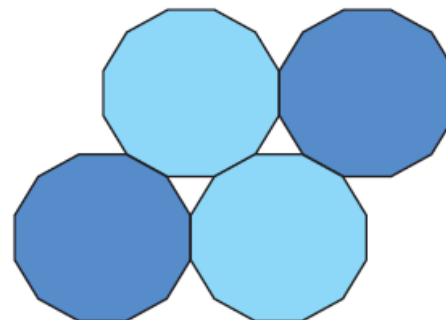
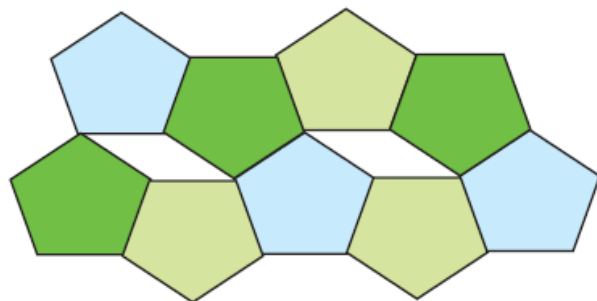


۱- در کاشی کاری، کاشی‌ها را طوری کنار هم قرار می‌دهند که روی هم نیفتند و جای خالی هم بین آنها نباشد. در اینجا چند نمونه کاشی کاری را مشاهده می‌کنید که هر کدام تنها با یک نوع کاشی انجام شده است.

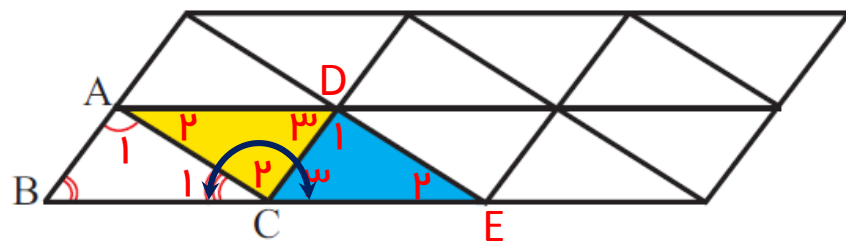


حالا به شکل‌های زیر توجه کنید. در هر مورد توضیح دهید، چرا کاشی کاری با یک نوع کاشی

انجام نمی‌شود؟



۲- سطح زیر با مثلث‌هایی هم‌نهشت با مثلث ABC کاشی‌کاری شده است.



مثلث آبی انتقال یافته مثلث ABC است،

مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.

زاویه‌های متناظر با هریک از زاویه‌های مثلث ABC را در این دو مثلث مشخص کنید.

در کاشی‌کاری بالا، قسمتی را که نشان می‌دهد $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ پیدا کنید.

$$B = D_{\text{س}} = C_{\text{س}}$$

$$A_1 = C_{\text{پ}} = D_1$$

$$C_1 = A_{\text{پ}} = E_{\text{پ}}$$

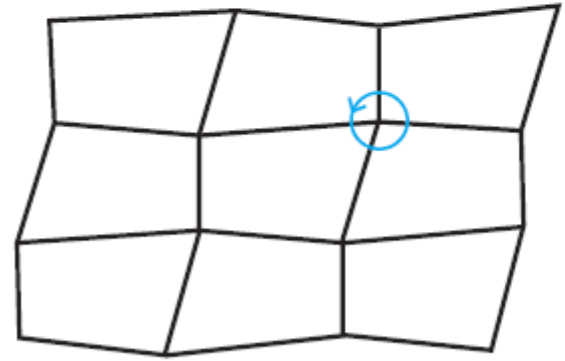
$$C_1 + C_{\text{پ}} + C_{\text{س}} = 180^\circ$$



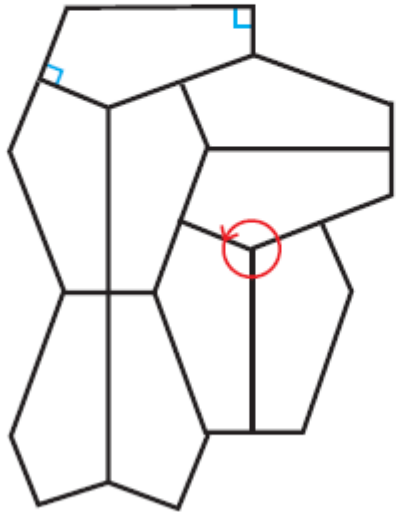
کار در کلاس



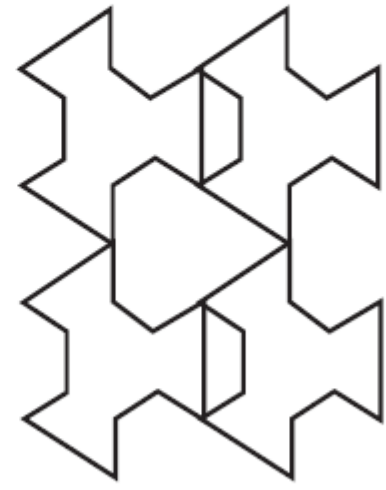
در کدام شکل کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است؟



الف



ب



ج ✓




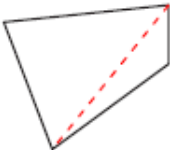
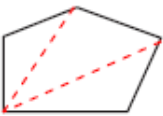
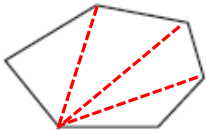
د



فعالیت



زاویه‌هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند، **زاویه‌های داخلی** آن چندضلعی نامیده می‌شوند. مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° درجه است.

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶
شکل				
تعداد مثلث‌ها	۱	۲	۳	۴
مجموع زاویه‌های داخلی	$1 \times 180^\circ = 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$3 \times 180^\circ = 540^\circ$	$4 \times 180^\circ = 720^\circ$

جدول بالا نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی با مجموع زاویه‌های

داخلی دو تا مثلث برابر است؛ پس مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° می‌شود.



الف) با کامل کردن جدول، مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های دیگر را به دست آورید.

$$7 - 2 = 5 \quad \text{تعداد مثلث‌ها}$$

$$5 \times 180 = 900$$

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک هفت ضلعی چند درجه است؟

$$8 - 2 = 6 \quad \text{تعداد مثلث‌ها}$$

$$6 \times 180 = 1080$$

یک هشت ضلعی چگونه؟ چرا؟

ج) عبارت جبری زیر را طوری کامل کنید که نشان‌دهنده مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی باشد.

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی یک } n \text{ ضلعی} = \left(\underline{\quad n \quad} - \underline{\quad 2 \quad} \right) \times 180^\circ$$



اکنون با کامل کردن جدول زیر اندازه هر یک از زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های منتظم را پیدا کنید.

اندازه هر زاویه	مجموع زاویه‌های داخلی	تعداد ضلع‌ها
$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$	180°	۳ مثلث متساوی الاضلاع
$360 \div 4 = 90$	360°	۴ مربع
$540 \div 5 = 108$	540°	۵
$\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$	720°	۶

یک عبارت جبری بنویسید که نشان‌دهنده اندازه هر یک از زاویه‌های یک n ضلعی منتظم باشد.

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

n



مجموع زاویه های n ضلعی $= (n - 2) \times 180^\circ$

کار در کلاس



۱- مجموع زاویه های هر یک از چند ضلعی های زیر را محاسبه کنید.

(ب) دوازده ضلعی منتظم

(الف) هفت ضلعی منتظم

$$10^\circ$$

$$(\cancel{12} - 2) \times 180^\circ = 1800^\circ$$

$$5^\circ$$

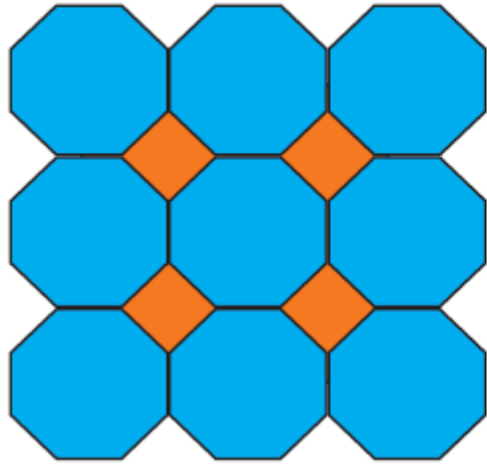
$$(\cancel{7} - 2) \times 180^\circ = 900^\circ$$

۲- به کمک جواب قسمت (ب) سؤال قبل، اندازه هر یک از زاویه های دوازده ضلعی منتظم

را حساب کنید.

$$1800 \div 12 = 150^\circ$$





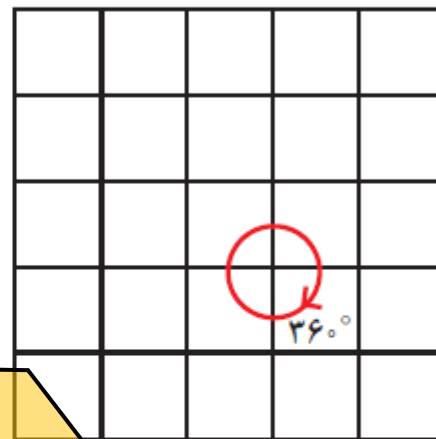
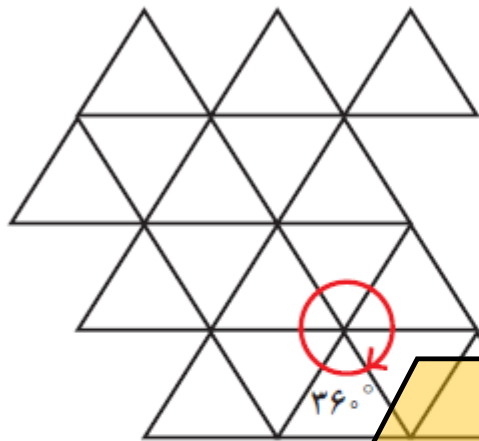
۳- سطح روبه‌رو با دو نوع کاشی منتظم کاشی کاری شده است.
اندازه زاویه‌های هر دو نوع کاشی را محاسبه کنید.

اندازه ی هر زاویه داخلی ۸ ضلعی منتظم = $\frac{(\cancel{8} - 2) \times 180^\circ}{\cancel{8}} = \frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$

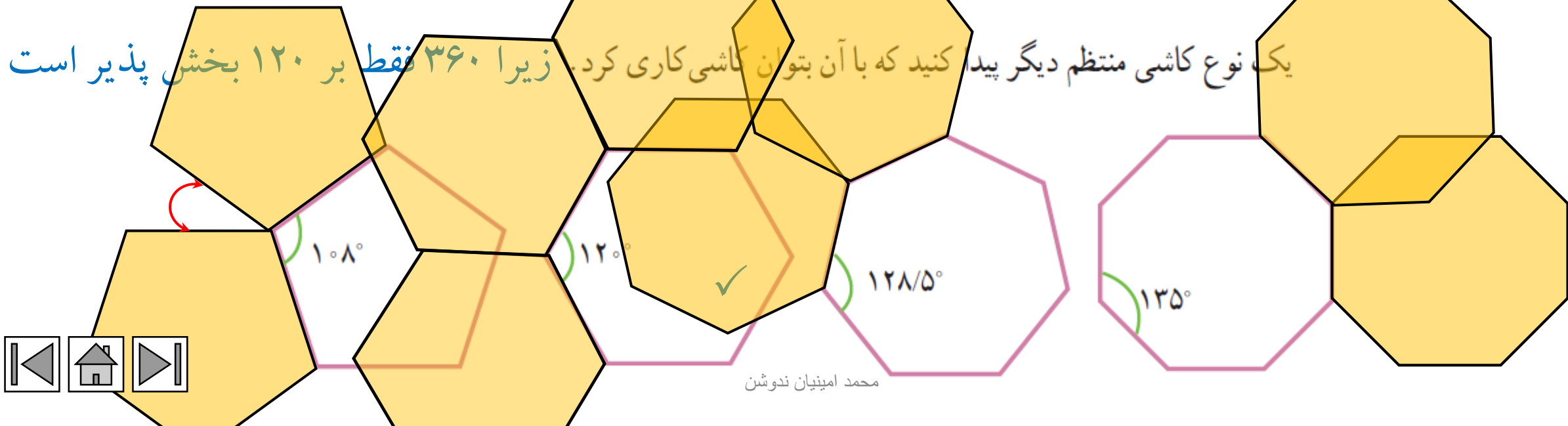
اندازه ی هر زاویه داخلی ۴ ضلعی منتظم = $\frac{(\cancel{4} - 2) \times 180^\circ}{\cancel{4}} = 90^\circ$



۴- کاشی‌هایی به شکل چندضلعی‌های منتظم داریم و می‌خواهیم سطحی را فقط با یک نوع از آنها کاشی‌کاری کنیم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که با سه ضلعی و چهارضلعی منتظم (یعنی مثلث متساوی الاضلاع و مربع) می‌توان کاشی‌کاری کرد.



یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی‌کاری کرد. زیرا ۳۶۰ فقط بر ۱۲۰ بخش پذیر است

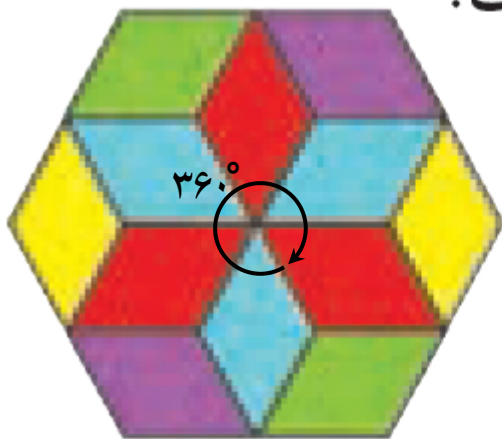


تمرین



۱- اندازه هر یک از زاویه‌های یک بیست ضلعی منتظم را پیدا کنید.

$$\frac{180 - 2 \times 180}{2} = 162^\circ$$



۲- در کاشی کاری روبه‌رو تنها یک نوع کاشی به کار رفته است.

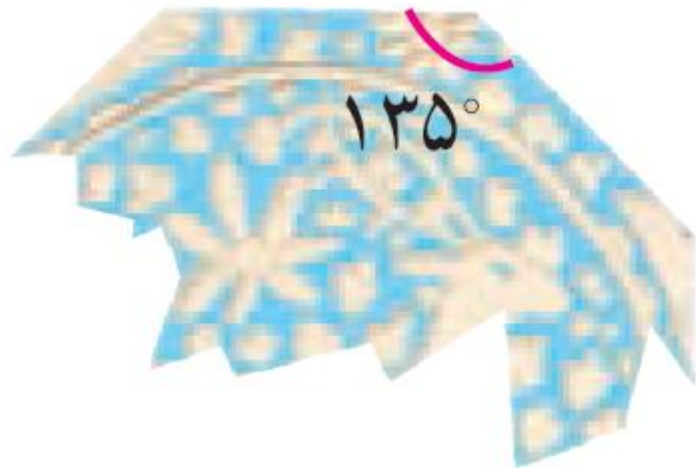
الف) این کاشی چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ لوزی

ب) اندازه هر یک از زاویه‌های آن چقدر است؟ 120° و 60° درجه

اندازه زاویه تند لوزی $360 : 6 = 60$

اندازه زاویه باز لوزی $180 - 60 = 120$





۳- شکل روبه‌رو قسمتی از یک بشقاب قدیمی است.
حدس می‌زنید این بشقاب چندضلعی بوده است؟ چرا؟
هشت ضلعی

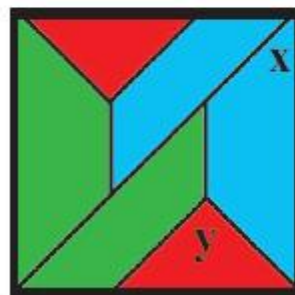
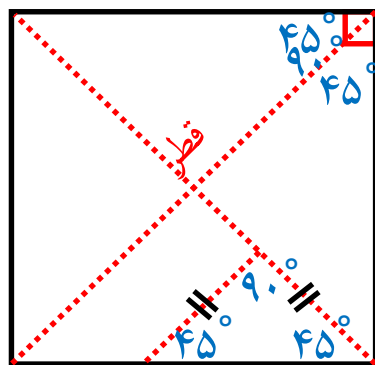
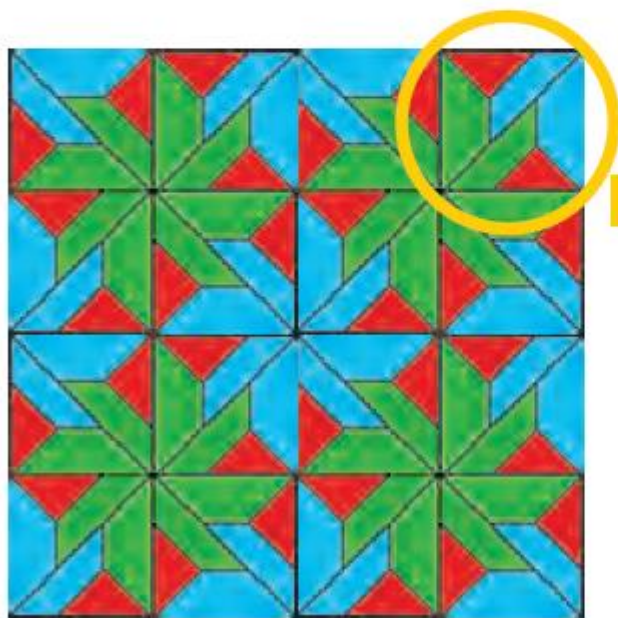
حدس و آزمایش:

اگر در معادله به جای n عدد ۸ را قرار دهیم جواب آن ۱۳۵ درجه بدست می‌آید.

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = \frac{(\cancel{8}-2) \times \cancel{180}}{\cancel{8} \cancel{4} \cancel{1}} = 135^\circ$$



۴- به کاشی کاری زیر توجه کنید. این کاشی کاری با سه نوع کاشی مختلف انجام شده است. شکل سمت راست قسمتی از این طرح را به صورت بزرگ تر نمایش داده است. اندازه زاویه های مشخص شده را به دست آورید.



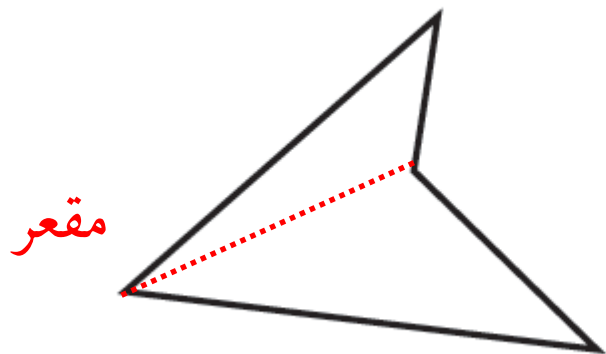
شکل سمت راست مربع است و کاشی ها متساوی الساقین هستند.

$$x = 45^\circ$$

$$y = 90^\circ$$

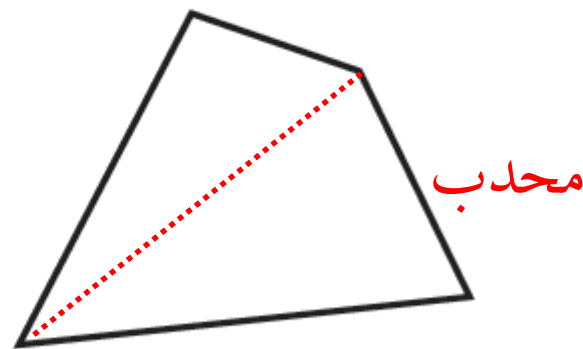
در هر مثلث متساوی الساقین دو زاویه مجاور به قاعده با هم مساویند در هر مربع قطر، نیمساز است

۵- مجموع زاویه‌های داخلی هر شکل را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.



(ب)

$$۲ \times ۱۸۰ = ۳۶۰$$



(الف)

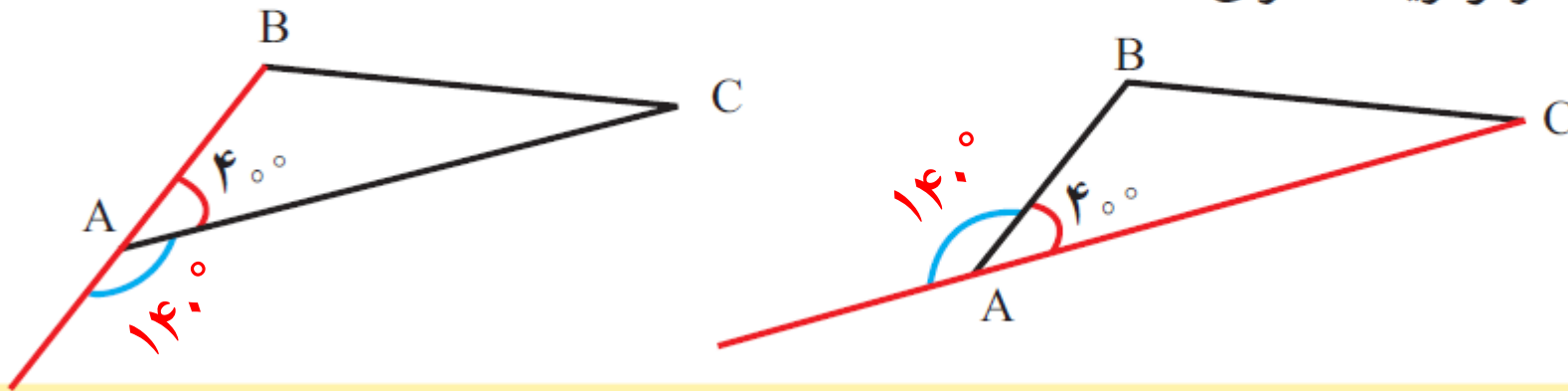
$$۲ \times ۱۸۰ = ۳۶۰$$



فعالیت



در شکل سمت چپ، زاویه خارجی رأس A از مثلث ABC از امتداد یافتن ضلع AB تشکیل شده است. در شکل سمت راست، زاویه خارجی رأس A از امتداد یافتن ضلع AC تشکیل شده است. چرا این دو زاویه مساوی‌اند؟



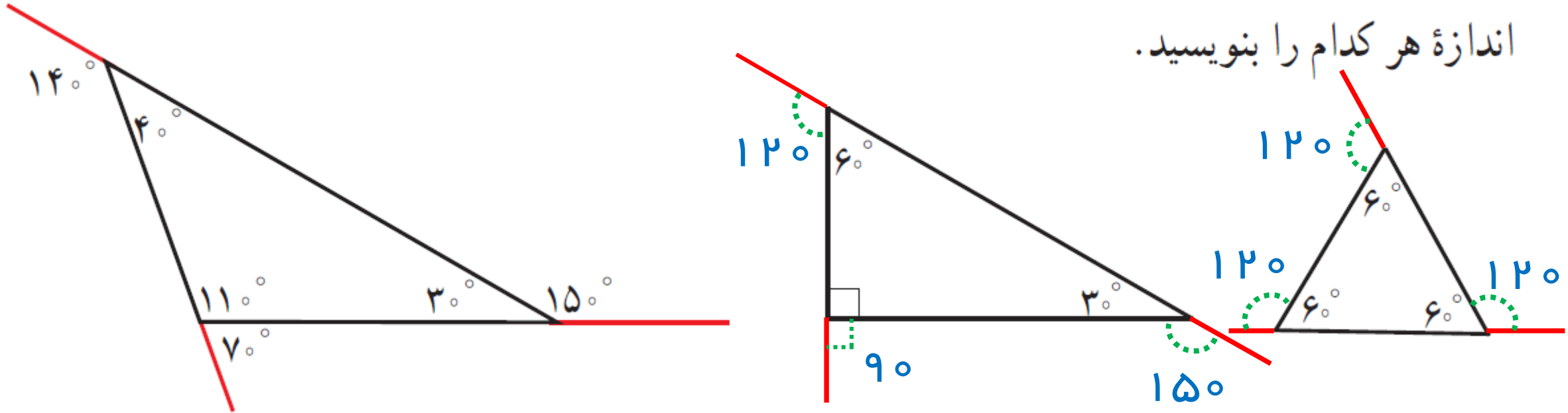
زاویه‌ای که در هر رأس یک چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می‌شود، **زاویه خارجی** آن رأس نامیده می‌شود.



کار در کلاس



۱- الف) مانند نمونه، در هر یک از مثلث‌های زیر زاویه خارجی هر سه رأس را رسم کنید و اندازه هر کدام را بنویسید.



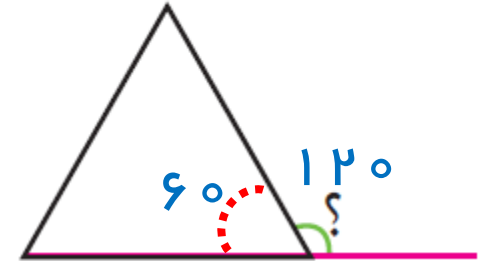
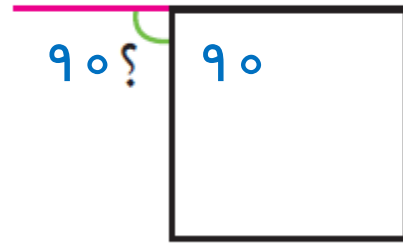
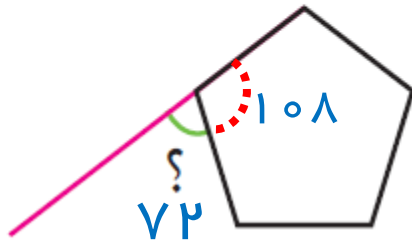
ب) مجموع زاویه‌های خارجی هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید. چه رابطه‌ای میان آنها دیده می‌شود؟

۳۶۰

مجموع زاویه‌های خارجی مثلث ۳۶۰ درجه است.

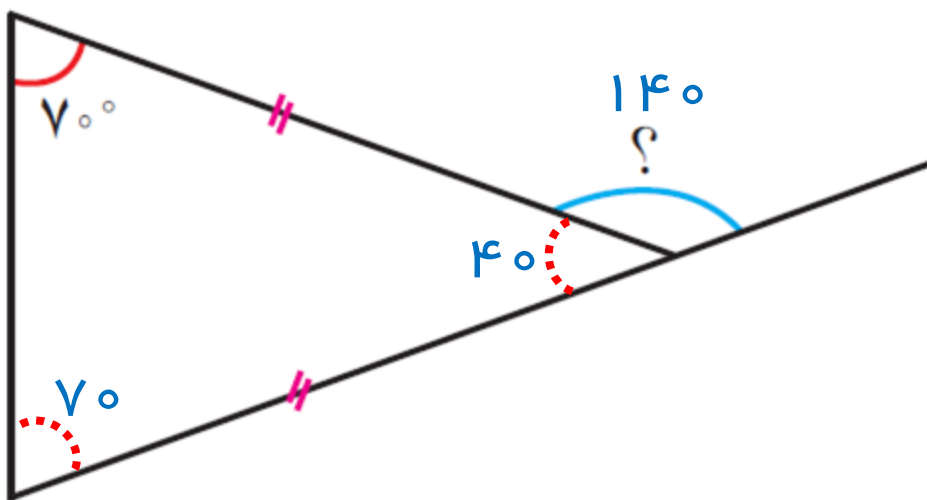


۲- چندضلعی‌های زیر منتظم‌اند. اندازه زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید.



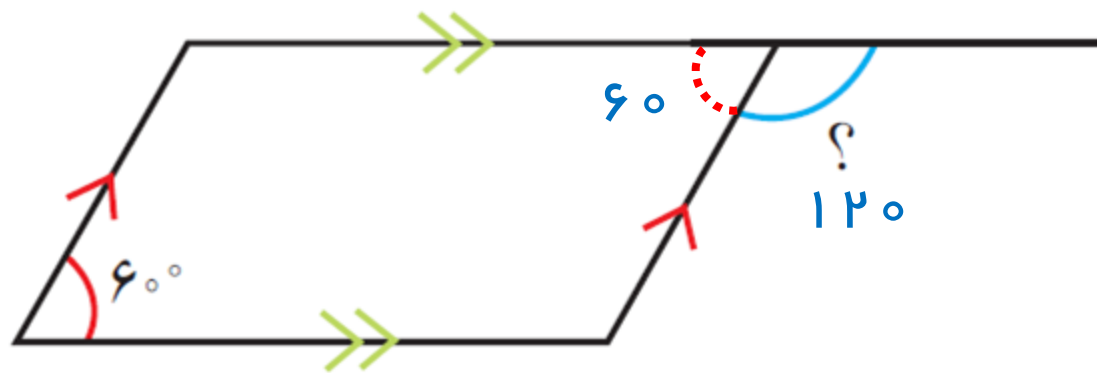
$$\frac{3 \times 36}{5 - 2} \times 180 = 108^\circ$$

۳- با توجه به شکل، اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



مجموع زاویه های داخلی مثلث 180 درجه است.

چون مثلث متساوی الساقین است دارای دو زاویه مساوی است.



زاویه خارجی مکمل زاویه داخلی است

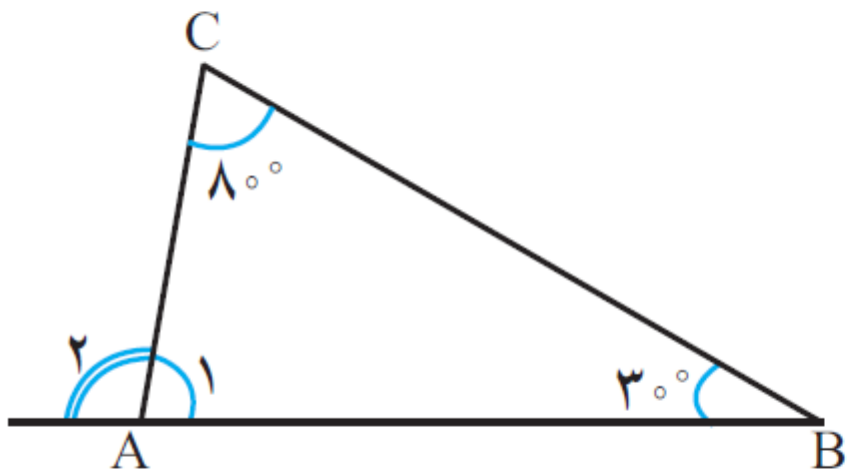
زاویه های روبرو در متوازی الاضلاع با هم مساویند.





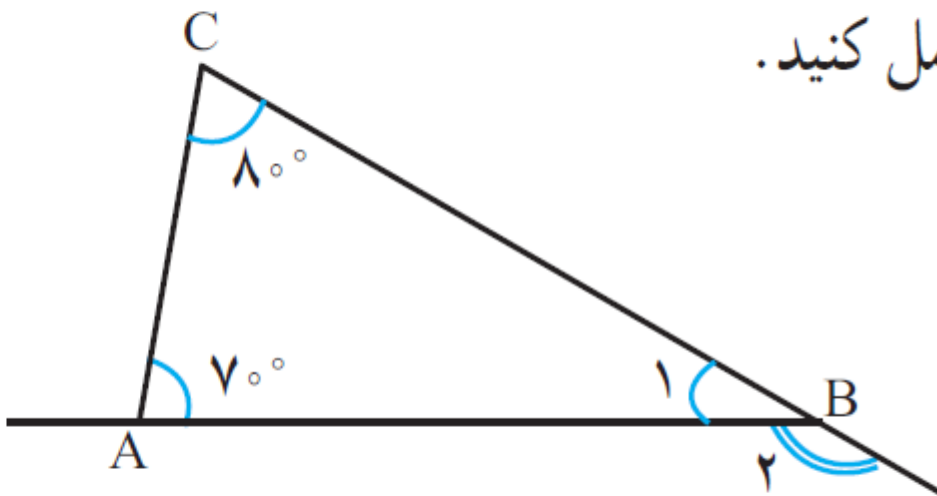
هدی برای یافتن زاویهٔ خارجی یکی از رأس‌های مثلث به ترتیب زیر عمل کرد. راه حل

او را کامل کنید.



$$\hat{A}_1 = 180^\circ - (3^\circ + 8^\circ) = 180^\circ - 11^\circ = 7^\circ$$

$$\hat{A}_2 = 180^\circ - 7^\circ = 11^\circ$$



$$\hat{B}_1 = 180^\circ - (7^\circ + 8^\circ) = 180^\circ - 15^\circ = 3^\circ$$

$$\hat{B}_2 = 180^\circ - 3^\circ = 15^\circ$$

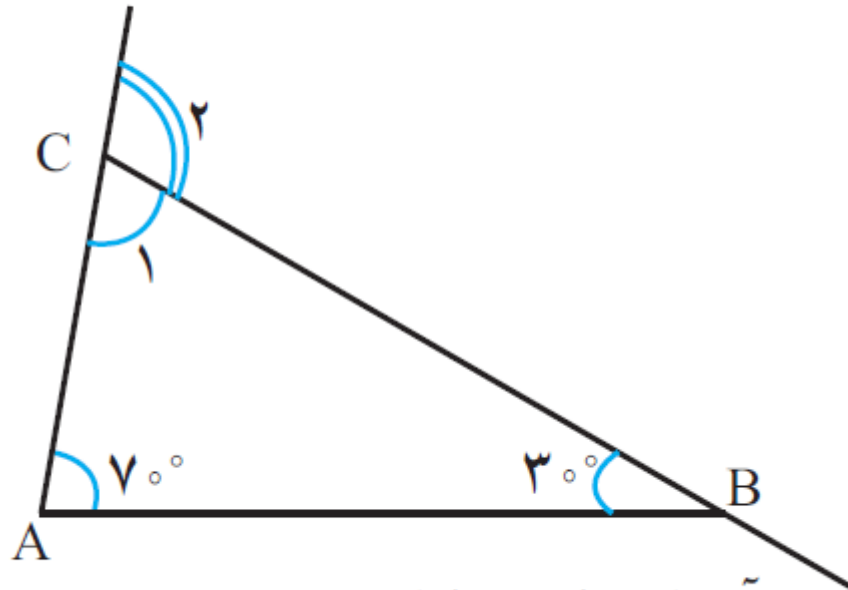
او رابطهٔ جالبی را مشاهده کرد. آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای؟

اندازه هر زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن مثلث



هدی با خودش فکر کرد: «آیا هر زاویه خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن

مثلث است؟» با یک مثال دیگر حدس خود را بررسی کرد.



$$\hat{C}_1 = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{C}_2 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

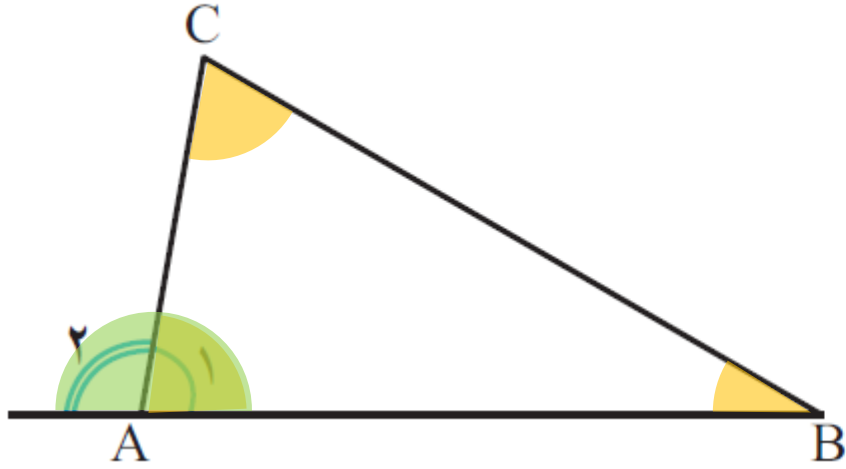
این آزمایش نیز حدس او را تأیید کرد. آیا حدس زدن و آزمایش کردن کافی است؟ چرا؟

خیر، چون همه حالت ها را در بر نمی گیرد.



یکی از دوستان هدی راه حل او را به صورت کلی و بدون در نظر گرفتن مثال نوشت تا به این

ترتیب درستی حدس او را اثبات کند.



$$\left. \begin{array}{l} \bullet \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \\ \bullet \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

بنابراین در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است.



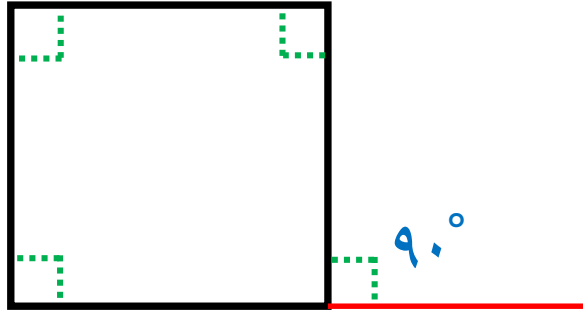
کار در کلاس



۱- مثالی بیاورید که نشان دهد جمله زیر نادرست است.

«هر زاویه خارجی یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه داخلی دیگر آن است.»

مربع



$$\text{اندازه زاویه خارجی} = 90^\circ$$

$$\text{اندازه سه زاویه داخلی دیگر} = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$








۲- اندازه دو زاویه یک مثلث را می‌دانیم، پس می‌توانیم اندازه زاویه سوم آن را پیدا کنیم.
 (چگونه؟) مجموع دو زاویه را محاسبه کرده و از ۱۸۰ کم می‌کنیم

برای اینکه بتوانیم اندازه همه زاویه‌های هر یک از شکل‌های زیر را پیدا کنیم، دست کم چندتا از آنها باید معلوم باشند؟

الف) لوزی	ب) چهارضلعی با ضلع‌های نامساوی
یک زاویه	سه زاویه



سطر اول جدول زیر نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث برابر 36° است.

تعداد ضلع‌ها	شکل	مجموع زاویه‌های داخلی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی	مجموع زاویه‌های خارجی
۳		$1 \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 36^\circ$
۴		$2 \times 180^\circ$	$4 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 36^\circ$
۵		$3 \times 180^\circ$	$5 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 36^\circ$
۶		$4 \times 180^\circ$	$6 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 36^\circ$
n		$(n-2) \times 180^\circ$	$n \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 36^\circ$

حاصل تفریق $= n - (n - 2) = n - n + 2 = 2$



الف) جدول را کامل کنید و مجموع زاویه‌های خارجی شکل‌های بعدی را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های خارجی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ ۳۶۰

یک هشت ضلعی چطور؟ ۳۶۰

مجموع زاویه‌های خارجی هر چندضلعی، ۳۶۰ درجه است.



کار در کلاس



۱- مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی‌های زیر را حساب کنید.

ب) ده ضلعی منتظم

۳۶۰ درجه

الف) هشت ضلعی

۳۶۰ درجه



۲- به کمک پاسخ قسمت (ب) سؤال قبل،

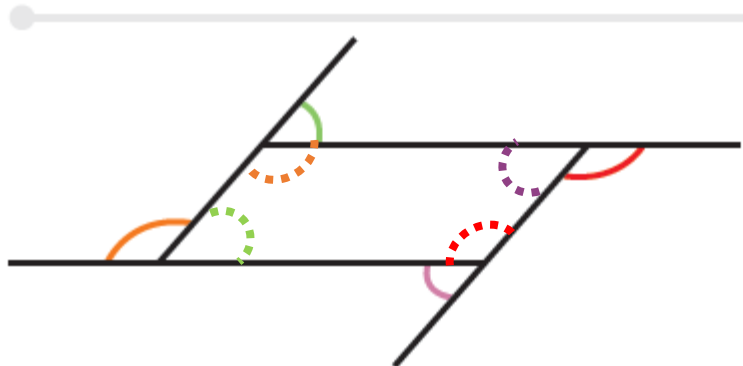
الف) اندازه هر زاویه خارجی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

ب) اندازه هر زاویه داخلی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

$$360 \div 10 = 36$$

$$180 - 36 = 144$$





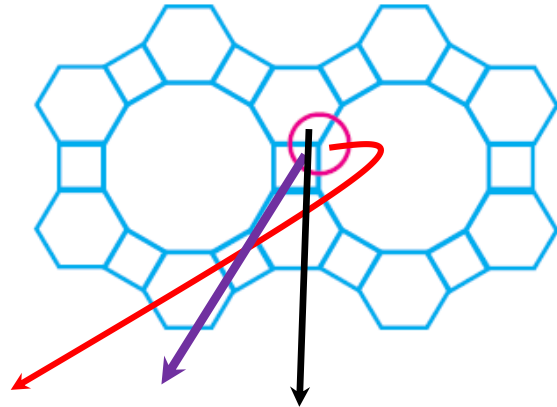
تمرین



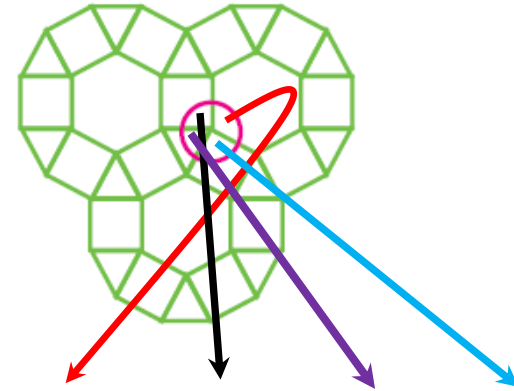
۱- زاویه‌های خارجی یک متوازی الاضلاع
در شکل نشان داده شده‌اند.

زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

۲- هر یک از طرح‌های زیر با استفاده از سه نوع کاشی منتظم طراحی شده است. با محاسبه زاویه‌های داخلی هر کاشی منتظم، نشان دهید زاویه مشخص شده در هر شکل 36° درجه است.



$$15^\circ + 9^\circ + 12^\circ = 36^\circ$$



$$12^\circ + 9^\circ + 6^\circ + 9^\circ = 36^\circ$$



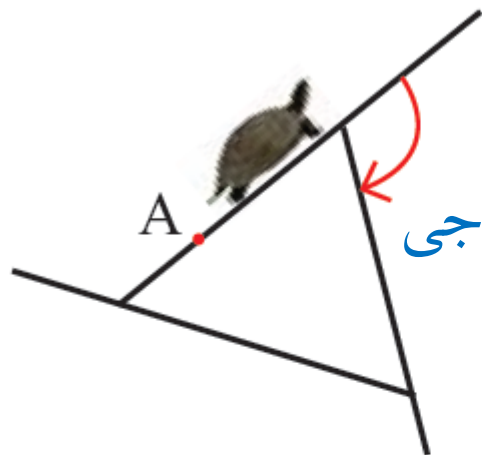
$$\text{اندازه هر زاویه داخلی ۱۲ ضلعی منتظم} = \frac{10}{12} \times \frac{15}{18}^\circ = 15^\circ$$

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی ۶ ضلعی منتظم} = \frac{4}{6} \times \frac{1}{3}^\circ = 12^\circ$$

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی ۴ ضلعی منتظم} = 9^\circ \quad \text{اندازه هر زاویه داخلی ۳ ضلعی منتظم} = 6^\circ$$

۳- لاک پشتی روی لبه باغچه‌ای حرکت می‌کند. او در هر گوشه می‌چرخد و روی لبه بعدی

قرار می‌گیرد.



الف) این لاک پشت در هر گوشه به اندازه زاویه داخلی می‌چرخد یا زاویه خارجی؟

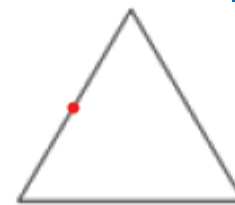
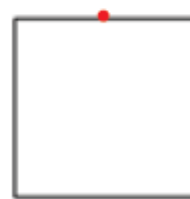
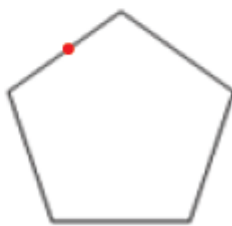
زاویه خارجی

ب) او حرکتش را از نقطه A شروع کرده است.

تا وقتی دوباره به A برگردد، روی هم چند درجه می‌چرخد؟ 360°

ج) این لاک پشت برای پیمودن محیط هر یک از باغچه‌های منتظم زیر با شروع از نقطه مشخص شده چند

درجه می‌چرخد؟ 360°



د) در پاسخ قسمت قبل چه الگویی را مشاهده می‌کنید؟ توضیح دهید.

مجموع زاویه های خارجی هر چندضلعی 360° درجه است.



مرور فصل ۳

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- چندضلعی محدّب
- چندضلعی مقعر
- مرکز تقارن
- چندضلعی منتظم
- زاویه داخلی
- زاویه خارجی



در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصهٔ درس را بنویسید.

- بررسی مرکز تقارن یک شکل
- پیدا کردن زاویه‌های مساوی و مکمل در خط‌های موازی و مورب
- تعریف متوازی‌الاضلاع
- تعریف مستطیل
- تعریف لوزی
- تعریف مربع
- رابطهٔ چهارضلعی‌ها
- خاصیت‌های چهارضلعی‌ها
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویهٔ داخلی یک چندضلعی منتظم
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویهٔ خارجی یک رأس مثلث



این درس به شما در درک بهتر شکل‌های هندسی و رابطهٔ بین آنها کمک می‌کند. ما در انواع صنایع دستی و آثار معماری کشور خود شکل‌های مختلف هندسی را می‌توانیم ببینیم.



تمرین‌های ترکیبی

۱- هر خانه جدول زیر را با علامت \times یا \checkmark کامل کنید.

قطرها برابر	قطرها منصف	زاویه‌های روبه‌رو برابر	ضلع‌های روبه‌رو موازی	ضلع‌های روبه‌رو برابر	
\times	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	متوازی‌الاضلاع
\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	مستطیل
\times	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	لوزی
\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	مربع



۲- اندازه زاویه‌های داخلی و خارجی یک هشت ضلعی منتظم را پیدا کنید.

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی ۸ ضلعی منتظم} = \frac{(\cancel{A} - \cancel{3}) \times \cancel{18}^{\cancel{45}}}{\cancel{2}^{\cancel{1}}} = 135^\circ$$

$$\text{اندازه هر زاویه خارجی} = 360 \div 8 = 45^\circ$$