



پایه: هفتم

فصل یک

راهبردهای حل مساله

راهبرد حدس و آزمایش

راهبرد زیر مسئله

راهبرد حل مسئله ساده تر

راهبرد روش نمادین

راهبرد رسم شکل

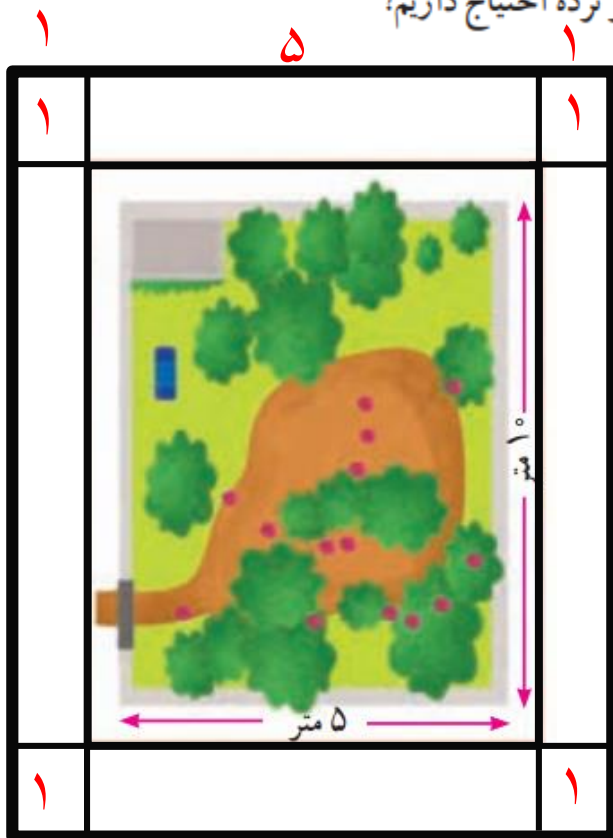
راهبرد الگوسازی

راهبرد حذف حالت های نامطلوب

راهبرد الگویابی

کشیدن یک شکل مناسب می‌تواند به حل مسئله کمک کند یا به طور کامل آن را حل کند؛ به طوری که نیازی به نوشتن عملیات و محاسبه نباشد. گاهی ممکن است شکل را فقط تصور کنید و آن را رسم نکنید. منظور از رسم شکل، نقاشی نیست؛ بلکه می‌توانید برای این کار شکل‌های ساده بکشید.

۱- یک باغچه مستطیل شکل به طول ۱۰ و عرض ۵ متر است. اگر به فاصله یک متر از ضلع‌های باغچه دورتا دور آن را نرده بکشیم، چند متر نرده احتیاج داریم؟



$$۱ + ۱ + ۱۰ = ۱۲$$

طول:

ابتدا یک مستطیل رسم کنید.

$$۱ + ۱ + ۵ = ۷$$

عرض:

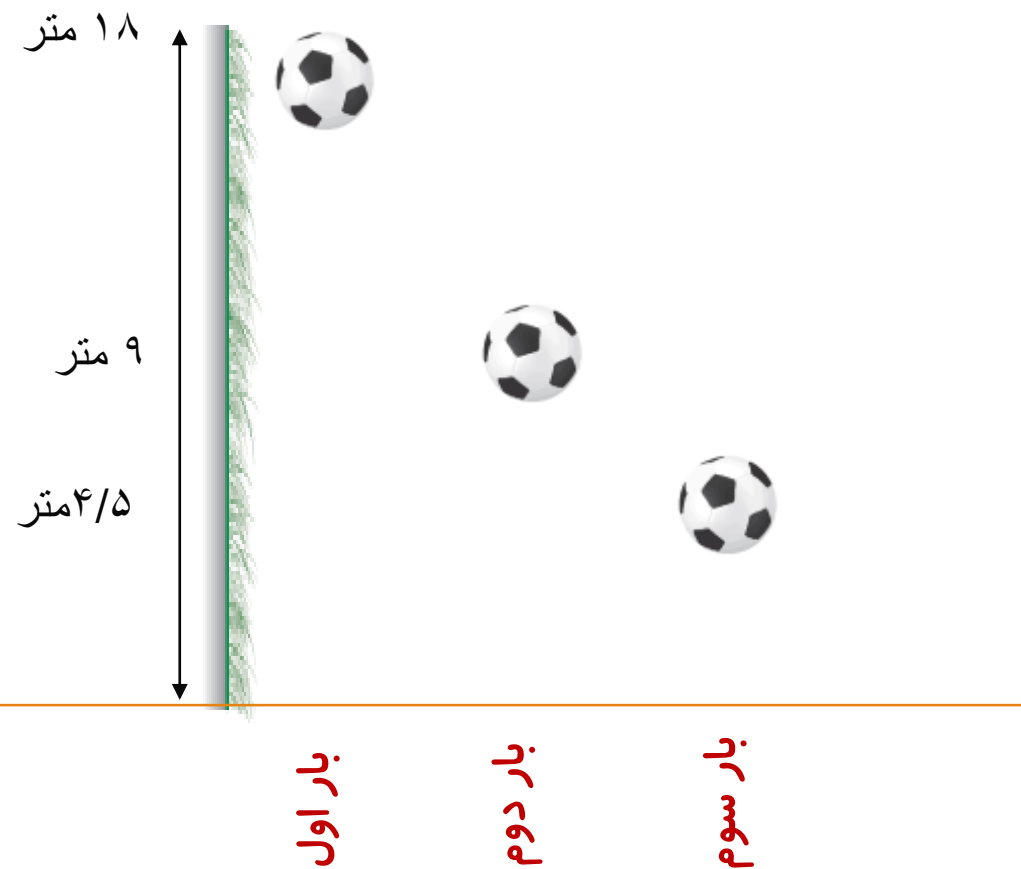
دور آن به فاصله یک متر از هر ضلع خط بکشید.

یک مستطیل جدید به وجود می‌آید. طول و عرض این مستطیل چقدر است؟

حالا برای پیدا کردن مترآز نرده کافی است محیط مستطیل جدید را پیدا کنیم.

$$۲ \times (۱۲ + ۷) = ۲ \times ۱۹ = ۳۸$$

۲- تویی از ارتفاع ۱۸ متری سطح زمین رها می‌شود و پس از زمین خوردن، نصف ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. این توپ از لحظه رها شدن تا سومین مرتبه‌ای که به زمین می‌خورد، چند متر حرکت کرده است؟



$$18 + 9 + 9 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 45$$

۳- قورباغه‌ای می‌خواهد از یک دیوار عمودی بالا برود. او با هر جهش ۳ متر بالا می‌رود و هر بار ۲ متر سُتر می‌خورد و پایین می‌آید. اگر ارتفاع دیوار ۹ متر باشد، او با چند جهش به بالای دیوار می‌رسد؟

۷ جهش

حرکت هفتم

۹

۸

۷

۶

حرکت ششم

۵

حرکت پنجم

۴

حرکت چهارم

۳

حرکت سوم

۲

حرکت دوم

۱

حرکت اول



برای حل بعضی از مسئله‌ها باید همه حالت‌های ممکن را بنویسید. برای اینکه هیچ حالتی از قلم نیفتد، لازم است آنها را با نظم، الگو و ترتیبی مشخص بنویسید. الگوسازی به شما کمک می‌کند تا مطمئن شوید همه حالت‌ها را نوشته‌اید. بنابراین در مسئله‌هایی که لازم است همه جواب‌ها و پاسخ‌های ممکن را بنویسید، می‌توانید از این راهبرد استفاده کنید. با توجه به نظم و ترتیبی که می‌سازید، به این راهبرد تفکر نظام‌دار نیز می‌گویند.

۱- دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۲۴ و حاصل جمع آنها کمترین مقدار باشد. جدول را با یک نظم و ترتیب کامل کنید.

اولین عدد	دومین عدد	حاصل جمع
۱	۲۴	۲۵
۲	۱۲	۱۴
۳	۸	۱۱
۴	۶	۱۰

کوچک‌ترین عدد طبیعی چیست؟ ۱

حاصل ضرب آن در چه عددی ۲۴ می‌شود؟ ۲۴

اکنون عدد طبیعی بعدی را در نظر بگیرید و به همین ترتیب عددها را پیدا کنید.

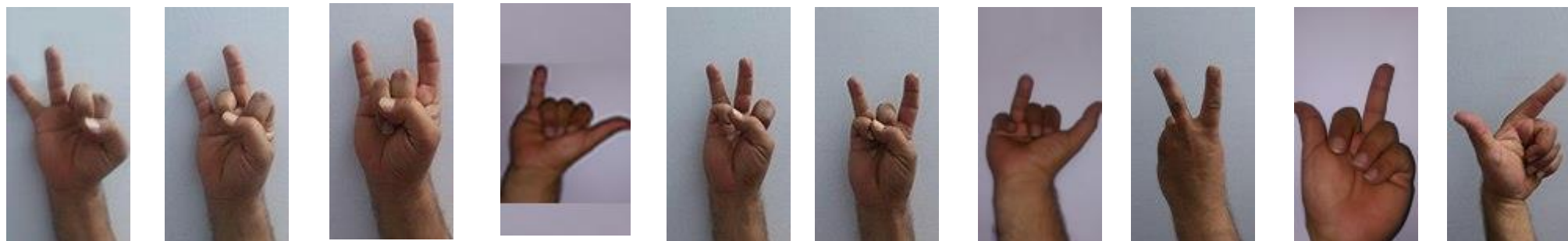
کمترین مقدار



عددهای ...، ۳، ۲، ۱ را عددهای طبیعی می‌نامیم.

۲- با انگشتان یک دست به ۵ صورت می توان عدد ۱ را نشان داد. به چند صورت می توان عدد ۲ را نشان داد؟

با انگشتان یک دست نشان می دهیم .



به ۱۰ صورت می توان عدد ۲ را نشان داد

	۱	۲	۳	۴	۵
۱	-	۱-۲	۱-۳	۱-۴	۱-۵
۲	تکراری	-	۲-۳	۲-۴	۲-۵
۳	تکراری	تکراری	-	۳-۴	۳-۵
۴	تکراری	تکراری	تکراری	-	۴-۵
۵	تکراری	تکراری	تکراری	تکراری	-

۳- با رقم‌های ۲، ۷ و ۵ تمام عددهای سه رقمی ممکن را بنویسید (در عددهای شما می‌تواند رقم‌های تکراری هم باشد).

۲۲۲	۵۵۵	۷۷۷
۲۲۵	۵۵۲	۷۷۲
۲۲۷	۵۵۷	۷۷۵
۲۵۲	۵۲۲	۷۲۲
۲۵۵	۵۲۵	۷۲۵
۲۵۷	۵۲۷	۷۲۷
۲۷۲	۵۷۲	۷۵۲
۲۷۵	۵۷۵	۷۵۵
۲۷۷	۵۷۷	۷۵۷



۴- تعداد زیادی سکه‌های ۵۰ و ۱۰۰ تومانی داریم. به چند حالت می‌توان کرایه ۵۰۰ تومانی تاکسی را پرداخت کرد؟

۵۰ تومانی	۱۰۰ تومانی	
۱۰	-	$(10 \times 50) + (0 \times 100) = 500$
۸	۱	$(8 \times 50) + (1 \times 100) = 500$
۶	۲	$(6 \times 50) + (2 \times 100) = 500$
۴	۳	$(4 \times 50) + (3 \times 100) = 500$
۲	۴	$(2 \times 50) + (4 \times 100) = 500$
-	۵	$(0 \times 50) + (5 \times 100) = 500$

پس به شش حالت می‌توان کرایه تاکسی را پرداخت کرد.

راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب



به شرایط و اطلاعات مسئله توجه کنید و حالت‌های نامطلوب و نادرست را کنار بگذارید؛ آنگاه پاسخ مسئله یا همان حالت‌های مطلوب به دست می‌آیند. برای پیدا کردن تمام حالت‌های ممکن می‌توانید از راهبرد الگوسازی استفاده کنید. ابتدا فهرستی از تمام حالت‌ها به دست آورید؛ سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله، حالت‌های نامطلوب را حذف کنید.

۱- مجموع سن سه نفر ۱۴ سال و حاصل ضرب سن آنها ۷۰ است. سن بزرگ‌ترین نفر چقدر است؟ ۷ سال

ابتدا با راهبرد الگوسازی همه حالت‌هایی را که ضرب سه عدد طبیعی برابر ۷۰ می‌شود، بنویسید.

به این جدول چه ستونی باید اضافه کنید تا حالت‌های نامطلوب حذف و فقط حالت مطلوب باقی بماند؟ مجموع سن

مجموع سن	نفر سوم	نفر دوم	نفر اول
۷۲	۷۰	۱	۱
۳۸	۳۵	۲	۱
۲۰	۱۴	۵	۱
۱۸	۱۰	۷	۱
۱۴	۷	۵	۲

حالت مطلوب

۲- دوست شما یک عدد حسابی^۱ کوچکتر از ۱۰۰ را در نظر گرفت. شما باید با طرح چند سؤال، عدد مورد نظر را پیدا کنید. او فقط می تواند به سؤال های شما بله و خیر بگوید. چگونه می توان عدد مورد نظر را پیدا کرد؟

در واقع از ۰ تا ۹۹، ۱۰۰ عدد وجود دارد که فقط یکی مطلوب و مورد نظر است و باقی عددها نامطلوب اند. با این توضیح کدام یک از سؤال های زیر مناسب تر است؟ چرا؟

● آیا عدد مورد نظر شما ۲۷ است؟

● آیا عدد مورد نظر شما یک رقمی است؟

● آیا عدد مورد نظر شما زوج است؟

● آیا عدد مورد نظر شما از ۵۰ بزرگ تر است؟

با توجه به پاسخی که به سؤال های بالا دادید، یک روش طرح سؤال همراه با نظم و ترتیب بیان کنید که بتوان با پرسیدن آنها به عدد مورد نظر رسید.

نصف کردن عدد ها به ما کمک می کند که زودتر به جواب برسیم .

عددهای ... ۳، ۲، ۱، ۰ را عددهای حسابی می گویند.

در ریاضی با دو نوع الگوی عددی یا هندسی روبه‌رو می‌شویم. کشف الگو، رابطه و نظم موجود در بین دنباله‌های عددی یا هندسی کمک می‌کند تا بتوانید خواسته مسئله را به دست آورید. این راهبرد در مسئله‌هایی کاربرد دارد که بین شکل‌ها یا عددها، الگو و رابطه خاصی وجود داشته باشد.

۱- سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید. رابطه بین عددها را توضیح دهید.

۲۲ و ۱۹ و ۱۶ و ۱۳ و ۱۰ و ۷ و ۴ و ۱

عددها سه تا سه تا اضافه می‌شوند.

۴۹ و ۳۶ و ۲۵ و ۱۶ و ۹ و ۴ و ۱

حاصل ضرب هر عدد طبیعی در خودش

۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴

عددها از چپ به راست نصف می‌شوند.

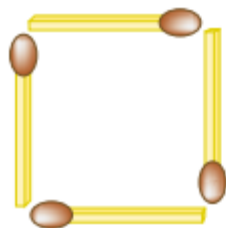
۲- شکل دهم با چند چوب کبریت ساخته می شود؟ چرا؟ هر شکل از شکل قبلی ۳ چوب کبریت بیشتر دارد. پس با جدول زیر حل می شود.



شکل (۱)

شکل اول

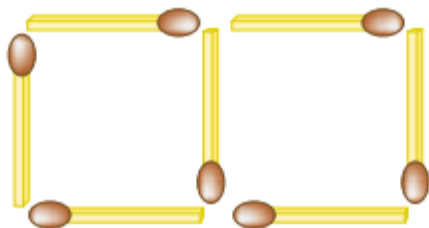
یک چوب کبریت



شکل (۲)

شکل دوم

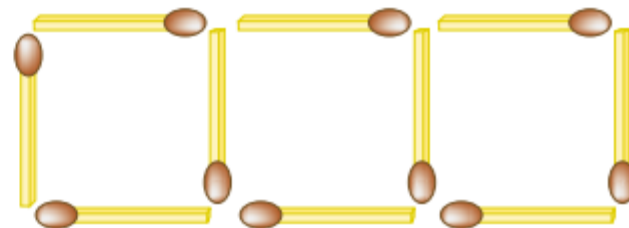
۴ چوب کبریت



شکل (۳)

شکل سوم

۷ چوب کبریت



شکل (۴)

شکل چهارم

۱۰ چوب کبریت

شماره شکل
تعداد چوب کبریت

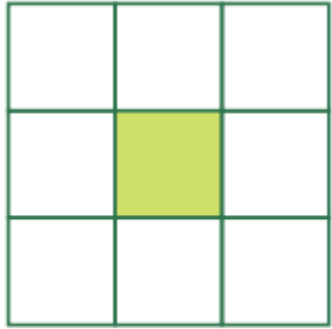
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	۲۲	۲۵	۲۸



شکل دهم با ۲۸ چوب کبریت ساخته می شود.

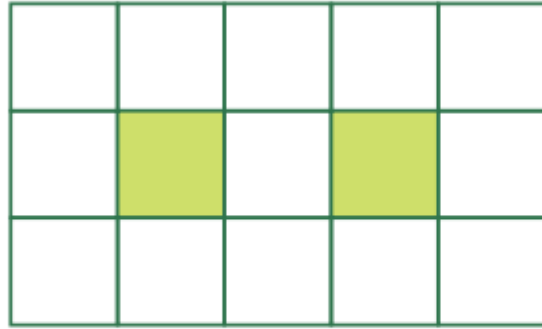
۳- اگر شکل‌ها به همین ترتیب ادامه پیدا کند، چه کسری از شکل شماره ۶، رنگی است؟

صورت کسر با شماره شکل برابر است. مخرج کسر از شماره قبلی ۶ تا بیشتر است. با جدول زیر حل می‌شود.



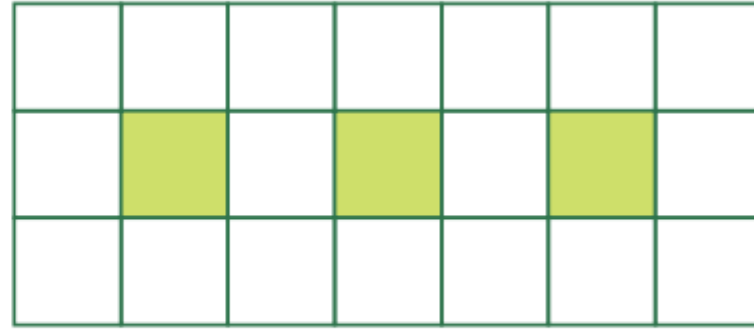
شکل (۱)

$$\frac{1}{9}$$



شکل (۲)

$$\frac{2}{15}$$



شکل (۳)

$$\frac{3}{21}$$

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶
کسر رنگ شده	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{6}{39}$



ممکن است حلّ یک مسئله، روش و راه حلّ مستقیمی نداشته باشد یا راه رسیدن به جواب آن طولانی و دشوار باشد. شما می‌توانید با یک روش منطقی و منظم پاسخ احتمالی مسئله را حدس بزنید؛ سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله، حدس خود را بررسی کنید و با توجه به نتیجه به دست آمده حدس بعدی را بزنید تا کم کم به پاسخ مسئله نزدیک شوید. برای نشان دادن حدس‌ها و آزمایش‌های خود راه حل مناسبی پیدا کنید.

۱- ۲۰ دستگاه دوچرخه و سه‌چرخه در یک توقفگاه (مصوب فرهنگستان Parking) وجود دارد. اگر تعداد کلّ چرخ‌های

آنها ۴۵ عدد باشد، چند دوچرخه و چند سه‌چرخه در توقفگاه وجود دارد؟

در حدس اول تعداد دوچرخه‌ها را ۱۰ و تعداد سه‌چرخه‌ها را هم ۱۰ عدد در نظر بگیرید.

با کامل کردن ردیف اول جدول حدس خود را بررسی و آزمایش کنید.

با توجه به نتیجه بررسی، باید تعداد سه‌چرخه‌ها را بیشتر کرد یا دوچرخه‌ها را؟ چرا؟

تعداد دوچرخه را بیشتر و سه‌چرخه‌ها را کم می‌کنیم، چون باید تعداد چرخ‌ها کم شود.

تعداد دوچرخه	تعداد سه‌چرخه	بررسی و آزمایش
۱۰	۱۰	$(10 \times 2) + (10 \times 3) = 50$
۱۲	۸	$(12 \times 2) + (8 \times 3) = 48$
۱۴	۶	$(14 \times 2) + (6 \times 3) = 46$
۱۵	۵	$(15 \times 2) + (5 \times 3) = 45$

پس ۱۵ دوچرخه و ۵ سه‌چرخه موجود است.



۲- دو زاویه متمم اند. یکی از این زاویه‌ها ۳ برابر زاویه دیگر است. اندازه هر زاویه را پیدا کنید.

دو زاویه که مجموع آن‌ها ۹۰ درجه باشد متمم هستند.

زاویه ۱	زاویه ۲	محاسبه
۶۰	۳۰	$۳۰ \times ۳ = ۹۰$
۶۵	۲۵	$۲۵ \times ۳ = ۷۵$
۶۸	۲۲	$۲۲ \times ۳ = ۶۶$
$۶۷/۵$	$۲۲/۵$	$۲۲/۵ \times ۳ = ۶۷/۵$



پس یکی از این زاویه‌ها $۲۲/۵$ و دیگری $۶۷/۵$ است.

۳- به جای ■ چه عددی می توان قرار داد؟

به جای ■ عددهای مختلفی را حدس بزنید، از عدد ۱۰ شروع کنید.

$$۳ \times \blacksquare + ۱۰ = ۳۱$$

$$۳ \times ۱۰ + ۱۰ = ۴۰$$

$$۳ \times ۹ + ۱۰ = ۳۷$$

$$۳ \times ۸ + ۱۰ = ۳۴$$

$$۳ \times ۷ + ۱۰ = ۳۱$$



جواب عدد ۷ می شود .



راهبرد زیرمسئله

مسئله پیچیده و چند مرحله‌ای را به چند مسئله ساده تبدیل کنید. فهرستی از این زیرمسئله‌ها را درست کنید؛ سپس به ترتیب به آنها پاسخ دهید. اگر ترتیب زیرمسئله‌ها را درست تشخیص داده باشید، حل هر زیرمسئله به حل مسئله بعدی کمک می‌کند تا در نهایت به خواسته اصلی مسئله برسید.

۱- پس‌انداز هفتگی محمد، ۳۰۰۰ تومان است. او حساب کرد ۵ هفته پس‌انداز او، نصف قیمت کیفی است که دوست دارد بخرد. قیمت کیف چقدر است؟

$$5 \times 3000 = 15000$$

الف) پس‌انداز ۵ هفته چقدر می‌شود؟

$$15000 \times 2 = 30000$$

ب) اگر این عدد نصف قیمت کیف باشد، قیمت کیف چقدر است؟

۲- طول، عرض و عمق یک استخر به ترتیب ۱۲، ۶ و ۳ متر است. می‌خواهند کف و دیوارهای این استخر را رنگ کنند. اگر برای هر متر مربع $\frac{۰}{۳}$ کیلوگرم رنگ لازم باشد، برای رنگ کردن استخر چند کیلوگرم رنگ نیاز است؟



مساحت دیوارها چقدر است؟

$$\text{دیوارهای کوچکتر: } ۲ \times (۶ \times ۳) = ۳۶ \quad \text{دیوارهای بزرگتر: } ۲ \times (۱۲ \times ۳) = ۷۲$$

مساحت کف چقدر است؟

$$\text{مساحت کف: } ۶ \times ۱۲ = ۷۲$$

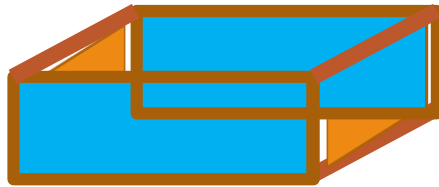
مساحت کف و دیوارها چقدر است؟

$$۳۶ + ۷۲ + ۷۲ = ۱۸۰$$

مقدار رنگ مصرفی چقدر است؟

$$۱۸۰ \times \frac{۰}{۳} = ۵۴$$

۵۴ کیلوگرم رنگ نیاز است.





۳- میوه فروشی، امروز ۴۰ کیلوگرم سیب به قیمت هر کیلوگرم ۲۵۰۰ تومان و ۸۰ کیلوگرم پرتقال به قیمت هر کیلوگرم ۱۵۰۰ تومان خرید. او هر کیلوگرم سیب را ۳۰۰۰ تومان و هر کیلوگرم پرتقال را ۲۰۰۰ تومان فروخت. این میوه فروش، از این کار خود چقدر سود برده است؟

چقدر پول بابت خرید سیب پرداخت کرده است ؟ $۴۰ \times ۲۵۰۰ = ۱۰۰۰۰۰$

چقدر پول از فروش سیب گرفته است ؟ $۴۰ \times ۳۰۰۰ = ۱۲۰۰۰۰$

از فروش سیب چقدر سود کرده است ؟ $۱۲۰۰۰۰ - ۱۰۰۰۰۰ = ۲۰۰۰۰$

چقدر پول بابت خرید پرتقال پرداخت کرده است ؟ $۸۰ \times ۱۵۰۰ = ۱۲۰۰۰۰$

چقدر پول از فروش پرتقال گرفته است ؟ $۸۰ \times ۲۰۰۰ = ۱۶۰۰۰۰$

از فروش پرتقال چقدر سود کرده است ؟ $۱۶۰۰۰۰ - ۱۲۰۰۰۰ = ۴۰۰۰۰$

از فروش سیب و پرتقال چقدر سود کرده است ؟ $۲۰۰۰۰ + ۴۰۰۰۰ = ۶۰۰۰۰$



راهبرد حل مسئله ساده‌تر

برای حلّ بعضی از مسئله‌ها، ابتدا مسئله‌ای ساده‌تر را که با مسئله اصلی در ارتباط است، حل می‌کنیم. سپس با استفاده از نتیجه و پاسخ مسئله ساده شده، جواب مسئله اصلی را به دست می‌آوریم. برای ساده کردن مسئله می‌توان از عددهای تقریبی یا عددهای کوچک‌تر استفاده کرد. برای نتیجه‌گیری و پیدا کردن پاسخ مسئله اصلی از راهبرد الگویابی استفاده می‌کنیم و الگوی کشف شده در مسئله ساده را به مسئله اصلی مرتبط می‌کنیم.

۱- قطر خورشید 1392530 کیلومتر و قطر کره زمین $12756/6$ کیلومتر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

برای ساده شدن مسئله بهتر است از عددهای تقریبی استفاده کنید. $1392530 \approx 1000,000$

خلاصه مسئله ساده شده را بنویسید و پاسخ دهید. $12756/6 \approx 10000$

قطر خورشید 1000000 و قطر زمین 10000 کیلومتر است. قطر خورشید چند برابر قطر زمین است؟

$$1000000 \div 10000 = 100$$

اما جواب اصلی مسئله :

$$1392530 \div 12756/6 \approx 109$$

۲- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

به جای حل کردن عبارت بالا، ابتدا ساده شده این مسئله را حل کنید.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

ابتدا فقط $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ را جمع می کنیم.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8}$$

حالا $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ را جمع می کنیم.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16}$$

حالا $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{16}$ را جمع می کنیم.

به مخرج هر سه نگاه کنید . مخرج آخری جواب مخرج است .

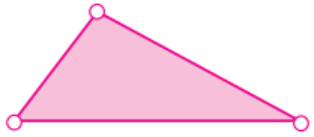
به صورت هر سه جواب نگاه کنید . جواب یکی کمتر از مخرج است .

پس جواب $\frac{1023}{1024}$ می باشد .

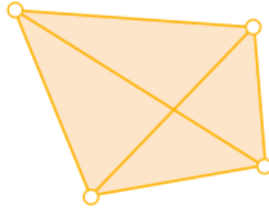
۳- اگر ۱۰ نقطه را که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط نیستند، دو به دو به هم وصل کنیم؛ چند پاره‌خط به وجود می‌آید؟

تعداد پاره‌خط‌ها در واقع مجموع تعداد ضلع‌ها و تعداد قطر‌هاست.

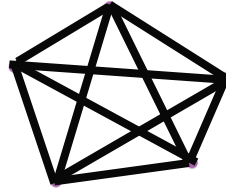
یک الگو پیدا کنید و برای ۱۰ نقطه نتیجه‌گیری کنید.



سه نقطه : ۳ پاره خط



چهار نقطه : ۶ پاره خط



پنج نقطه : ۱۰ پاره خط

تعداد نقطه	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
پاره خط	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵



با توجه به جدول :

۴۵ پاره خط بوجود می‌آید.

شماره شکل × یکی کمتر از شماره شکل

۲

بسیاری از مسئله‌ها را می‌توانیم به کمک نمادهای جبری به یک معادله تبدیل کنیم. از فصل سوم به بعد می‌توانید از این راهبرد نیز برای حل مسئله استفاده کنید. در بعضی از مسئله‌ها هم می‌توانیم از مدل‌سازی هندسی استفاده کنیم. تبدیل مسئله به یک شکل هندسی و حل هندسی آن نیز نوعی روش نمادین یا مدل‌سازی به‌شمار می‌رود.

۱- احمد ۳۰۰۰۰ تومان پول داشت. او ۴ دفتر خرید و ۲۰۰۰ تومان بایش باقی‌ماند. قیمت هر دفتر چقدر است؟

$$4 \times \square + 2000 = 30000$$

متن این سؤال را می‌توانید با تساوی مقابل نشان دهید.

مربع نشان دهنده چه چیزی است؟ **قیمت هر دفتر**

$$4 \times 5000 + 2000 = 22000$$

اکنون می‌توانید عددی را که باید در مربع قرار گیرد، حدس بزنید و آزمایش کنید.

$$4 \times 6000 + 2000 = 26000$$

(در فصل سوم، این مسئله را به روش دیگر حل خواهید کرد.)

$$4 \times 7000 + 2000 = 30000$$

قیمت هر دفتر ۷۰۰۰ تومان است

۲- فاطمه کتاب داستانی را در ۶ ساعت مطالعه کرد و ۱۰ صفحه از آن باقی ماند. اگر این کتاب ۱۰۰ صفحه داشته باشد، فاطمه

به طور متوسط در هر ساعت چند صفحه از آن را مطالعه کرده است؟

$$6 \times \square + 10 = 100$$

$$6 \times 10 + 10 = 70$$

$$6 \times 14 + 10 = 94$$

$$6 \times 15 + 10 = 100$$

در هر ساعت ۱۵ صفحه مطالعه کرده است

۳- یک سالن مستطیل شکل است. می خواهند در مکانی از سقف این سالن دریچه خنک کن (مصبوب فرهنگستان Cooler)

قرار دهند؛ به طوری که از ۴ گوشه آن به یک اندازه باشد. محل دریچه را تعیین کنید.



دو قطر مستطیل را رسم کنید ، محل برخورد دو قطر جواب مسئله است .